Aufgabe 2b α)

Sei M eine endliche Menge, $|M|=m$, $0\leqslant n\leqslant m$.
Man zeige durch Induktion über m: Es gibt $\binom{m}{n}$ n-elementige Teilmengen von M.

Lösung:
Die Grenzfälle n=0 und n=Elementezahl von M sind klar: es gibt nur eine einzige 0-elementige Teilmenge von M, nämlich die leere Menge, und es gibt nur eine einzige m-elementige Teilmenge von M, nämlich M selbst. Diese Grenzfälle brauchen wir also im Folgenden nicht weiter zu beachten.

Der Induktionsanfang m=0 ist ebenfalls klar. In diesem Fall ist $M=\emptyset$, und die leere Menge ist die einzige Teilmenge von M. Es gibt also genau eine Teilmenge von M mit 0 Elementen, und dies entspricht der Gleichung $\binom{0}{0}=1$.

Induktionsschluß:
Wir gehen aus von $M=\{a_1,\ldots,a_{m+1}\}$ und $1\leqslant n\leqslant m$.
Die Menge der n-elementigen Teilmengen von M zerfällt in zwei disjunkte Teile: diejenigen, die das Element a_{m+1} enthalten, und diejenigen, die es nicht enhalten.

Die Anzahl derjenigen n-elementigen Teilmengen, die a_{m+1} enthalten, ist offenbar gleich der Anzahl der (n-1)-elementigen Teilmengen der m-elementigen Menge $\{a_1,\ldots,a_m\}$, und somit nach Induktionsvoraussetzung $\binom{m}{n-1}$.

Die Anzahl derjenigen n-elementigen Teilmengen, die a_{m+1} nicht enthalten, ist offenbar gleich der Anzahl der n-elementigen Teilmengen von $\{a_1,\ldots,a_m\}$, und nach Induktionsvoraussetzung $\binom{m}{n}$.

Damit ist die Anzahl der n-elementigen Teilmengen der m+1-elementigen Menge M gleich $\binom{m}{n-1}+\binom{m}{n}$ und dies ist nach der Rekursionsformel für die Binomialkoeffizienten gleich $\binom{m+1}{n}$.