Mathematik I, Logik und Algebra, WS2010/11
M. Hortmann

Blatt 8

Aufgabe 2
G sei eine Gruppe, H eine Untergruppe.

a) In G gebe es bzüglich H genau zwei verschiedene Linksnebenklassen xH und yH . Man zeige, daß unter dieser Bedingung H Normalteiler in G ist.

Lösung:
Wir wissen also, daß $xH \cup yH = G$ und $xH \cap yH = \emptyset$.
In einer der beiden Nebenklassen muß das neutrale Element e der Gruppe liegen, sagen wir $e \in yH$.
Dann ist $e=yh$, also $y = h^{-1} \in H$. Damit ist $yH=H$; wir können also von einer Zerlegung $G = H \cup xH$ und $H \cap xH = \emptyset$ ausgehen, und von $x \notin H$.

Zu zeigen ist $\forall z \in G \ \forall h \in H: \ z^{-1} h z \in H$.

Sei also $z \in G$ und $h \in H$.
1. Fall $z^{-1} \in H$: Selbstverständlich ist dann $z^{-1} h z \in H$, denn H ist ja Untergruppe von G.
2. Fall $z^{-1} \notin H$: Dann ist $z^{-1} \in xH$, also $z^{-1} = x k$ mit $k \in H$. Zunächst folgt $z = (x k)^{-1} = k^{-1} x^{-1}$ und daher $z^{-1} h z = x k h k^{-1} x^{-1}$. Läge dieses Element nicht in H, so läge es in xH. Es wäre also $x k h k^{-1} x^{-1} = x m$ mit $m \in H$. Durch Multiplikation von links mit x^{-1} auf beiden Seiten ergibt sich $k h k^{-1} x^{-1} = m$, und weiter erhält man nach Multiplikation von links mit m^{-1} und von rechts mit x die Aussage $x = m^{-1} k h k^{-1} \in H$, Widerspruch! Also liegt $z^{-1} h z$ doch in H, was zu zeigen war.