Nebenklassen bezüglich einer Untergruppe

Sei G eine Gruppe, $H \subset G$ eine Untergruppe.

Davon ausgehend, kann man G in eine Anzahl disjunkter Mengen aufteilen, von denen jede so groß ist wie H und von denen H eine ist.

Beispiel: $G = \mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ und $H := \{0, 3, 6, 9\}$
In diesem Fall hat man $G = \{0, 3, 6, 9\} \cup \{1, 4, 7, 10\} \cup \{2, 5, 8, 11\}$

Allgemein bildet man „Linksnebenklassen", d.h. zu jedem $x \in G$ die Menge $xH := \{xh \mid h \in H\}$.
Zwei Nebenklassen xH, yH sind entweder gleich, oder sie sind disjunkt!

Dies sieht man so: hat man ein Element $z \in xH \cap yH$, so gibt es demnach $h_1, h_2 \in H$ mit $z = xh_1 = yh_2$. Daraus folgt $x = yh_2 h_1^{-1}$, und man hat für $h \in H$: $xh = yh_2 h_1^{-1} h \in yH$. Also liegen alle Elemente von xH in yH, also folgt $xH \subset yH$. Analog zeigt man die umgekehrte Inklusion und hat somit die Identität $xH = yH$.

Da jedes $x \in G$ wegen $x = xe \in xH$ in einer Nebenklasse vorkommt, zerfällt also die Gruppe in die disjunkten Nebenklassen. Da die Abbildung $H \rightarrow xH$, $g \mapsto xg$ trivialerweise bijektiv ist, haben alle Nebenklassen dieselbe Elementezahl wie H.

Üblicherweise bezeichnet man die Menge der Nebenklassen mit G/H. Ist G endlich, so hat man offenbar die Gleichung

$$|G| = |H| \cdot |G/H|$$

Durch diese Gleichung wird lediglich ausgedrückt, daß G in soviele Nebenklassen der Größe $|H|$ zerfällt wie es verschiedene Nebenklassen gibt.

Multiplikation von Nebenklassen

Man würde gern auf der Menge der Nebenklassen selbst eine Gruppenoperation haben. Es bietet sich an, diese so zu definieren zu versuchen: $(xH) \cdot (yH) := (xy)H$.

Die Frage dabei ist, ob diese Operation wohldefiniert ist, d.h. man muß prüfen ob gilt:
$xH = zH$ und $yH = wH \Rightarrow (xy)H = (zw)H$.
Versuchen wir die Gleichung $(xy)H = (zw)H$ zu prüfen, indem wir von einem Element $xyh \in (xy)H$ ausgehend zeigen können, daß es auch Element von $(zw)H$ ist. Die umgekehrte Inklusion würde man dann analog zeigen.

Aus der Voraussetzung $xH = zH$ folgt $x = zh_1$ für ein $h_1 \in H$ und aus $yH = wH$ folgt $y = wh_2$ für ein $h_2 \in H$. Wäre G kommutativ, so hätte man: $xyh = z h_1 w h_2 h = zw h_1 h_2 h \in zw H$, und wir hätten die Wohldefiniertheit der Operation nachgewiesen.

Kommutativität wäre eine zu große Einschränkung. Aber ganz ohne Einschränkung geht es nicht: wir müssen eine Forderung an die Untergruppe H stellen, welche nicht jede Untergruppe erfüllt, nämlich die sogenannte „Normalteiler-Eigenschaft":

Eine Untergruppe $H \subset G$ heißt Normalteiler in G,
wenn für alle $x \in G$ und für alle $h \in H$ gilt: $x^{-1} h x \in H$

Gehen wir aus von einem beliebigen $y \in G$ und setzen $x := y^{-1}$, so erhalten wir die äquivalente Bedingung, daß $y h y^{-1}$ in H liegen muß.

Offenbar sind die trivialen Untegruppen $\{e\}$ und G selbst Normalteiler in G.
Im übrigen zeigt man leicht, daß der Kern eines jeden Homomorphismus $G_1 \rightarrow G_2$ ein Normalteiler in G_1 ist. Auch gehört an diese Stelle ein Beispiel einer Untergruppe, welche kein Normalteiler ist.

Jetzt aber soll nur die Wohldefiniertheit der obigen Multiplikation von Restklassen gezeigt werden, unter Benutzung der Normalteiler-Eigenschaft der Untergruppe:
Wir gehen vor wie vorher:

$$xyh = z h_1 w h_2 h = z w (w^{-1} h_1 w) h_2 h = z w (h_3 h_2 h) \in zw H$$

Für die dritte Gleichung haben wir die Normalteiler-Eigenschaft benutzt: es ist $h_3 := w^{-1} h_1 w \in H$.
Den kleinen Trick, der zur zweiten Gleichung führt, hatte ich in der Vorlesung nicht gesehen.