Blatt 4

Aufgabe 3c)
Für $n, m \in \mathbb{N}$ wird definiert: $n < m :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n + k = m$

Man zeige durch Induktion: $\forall\, n \in \mathbb{N}: \ (\forall\, m \in \mathbb{N}: \ m < n \text{ oder } m = n \text{ oder } n < m)$
Bemerkung: dies bedeutet, daß die durch $\leq$ gegebene Ordnung auf $\mathbb{N}$ total ist.

Lösung:

Kürzen wir die Aussage $\forall\, m \in \mathbb{N}: \ (m < n \text{ oder } m = n \text{ oder } n < m)$ ab durch $E(n)$, so ist zu zeigen: $\forall\, n \in \mathbb{N}: \ E(n)$. Dies soll durch Induktion geschehen:

Zu zeigen ist also zunächst: E(1), d.h. $\forall\, m \in \mathbb{N}: \ (m < 1 \text{ oder } m = 1 \text{ oder } 1 < m)$. Dazu reicht es, $\forall\, m \in \mathbb{N}: \ (m = 1 \text{ oder } 1 < m)$ zu zeigen. Kürzt man die Aussage $(m = 1 \text{ oder } 1 < m)$ ab durch $F(m)$, so zeigen wir jetzt also $\forall\, m \in \mathbb{N}: \ F(m)$.

> Auch dies soll durch Induktion geschehen. Dazu ist zunächst zu zeigen:
> $F(1)$, d.h. 1=1 oder 1<1, und dies ist offenbar wahr.
> Danach ist $F(m) \Rightarrow F(m+1)$ zu zeigen.
>
> > Wir dürfen also $F(m)$ voraussetzen und müssen dann $F(m+1)$ zeigen.
> > $F(m)$ ist aber gleichbedeutend mit $m=1$ oder $1<m$.
> > Ist $m=1$, so ist $m+1=1+1$, also $1<m+1$, also gilt $F(m+1)$.
> > Ist $1<m$, so gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $1+k=m$, also $1+(k+1)=m+1$, also $1<m+1$, also $F(m+1)$.
> > Also gilt in jedem Fall $F(m+1)$, daher $F(m) \Rightarrow F(m+1)$.

Jetzt muß $E(n) \Rightarrow E(n+1)$ gezeigt werden.
Wir setzen also $E(n)$ voraus und müssen $E(n+1)$ zeigen.
$E(n)$ bedeutet: $\forall\, m \in \mathbb{N}: \ (m < n \text{ oder } m = n \text{ oder } n < m)$.

$E(n+1)$ bedeutet: $\forall\, m \in \mathbb{N}: \ (m < (n+1) \text{ oder } m = (n+1) \text{ oder } (n+1) < m)$.

Sei jetzt $m \in \mathbb{N}$ beliebig gegeben. Da $E(n)$ vorausgesetzt wird, gilt einer der drei Fälle:
$m<n$ oder $m=n$ oder $n<m$.

Im ersten Fall gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $m+k=n$, also $m+(k+1)=n+1$, daher $m<n+1$.
Im zweiten Fall gilt $m+1=n+1$, also ebenfalls $m<n+1$.
Im dritten Fall gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n+k=m$. Wir haben oben gezeigt, daß $k=1$ oder $k>1$ gelten muß.

> Ist $k=1$, so ist $n+1=m$.
> Ist $k>1$, so gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1+j=k$, also $m=n+k=(n+1)+j$, also $n+1<m$.

In jedem Fall gilt also $m<n+1$ oder $n+1=m$ oder $n+1<m$.

Damit ist $E(n+1)$ nachgewiesen und wir haben $E(n) \Rightarrow E(n+1)$ gezeigt.