

## Beweis des Kommutativgesetzes der Multiplikation

Wir benötigen drei Hilfsbehauptungen:

1.  $\forall m, n \in \mathbb{N}: n \cdot 1 = 1 \cdot n$

Dies wurde in der Vorlesung durch Induktion bewiesen.

2.  $\forall m, n \in \mathbb{N}: (n+1) \cdot m = n \cdot m + m$

Den Beweis führen wir am Schluß.

3. Das Kommutativgesetz der Addition. Soll in Aufgabenblatt 4 bewiesen werden.

Zu zeigen ist  $\forall n \in \mathbb{N}: (\forall m \in \mathbb{N}: mn = nm)$ , und zwar durch „Induktion über  $n$ “.

Induktionsanfang:  $n=1$ .

Zu zeigen ist:  $\forall m \in \mathbb{N}: m \cdot 1 = 1 \cdot m$ . Dies ist gerade die bereits bewiesene Hilfsbehauptung 1.

Induktionsschluß: Wir dürfen  $\forall m \in \mathbb{N}: m \cdot n = n \cdot m$  voraussetzen und müssen unter dieser Voraussetzung die Aussage  $\forall m \in \mathbb{N}: m \cdot (n+1) = (n+1) \cdot m$  beweisen.

Sei also  $m \in \mathbb{N}$  gegeben. Dann ist

$$m \cdot (n+1) = m \cdot S(n) = m \cdot n + m = n \cdot m + m = (n+1) \cdot m, \text{ was zu zeigen war.}$$

Dabei gilt das erste Gleichheitszeichen aufgrund der Definition von  $n+1$ , das zweite ist die Rekursionsformel in der Definition der Multiplikation, beim dritten wird die Induktionsvoraussetzung benutzt und das vierte gilt wegen der Richtigkeit der 2. Hilfsbehauptung.

Beweis der Hilfsbehauptung 2:

Wir beweisen  $\forall m \in \mathbb{N}: (\forall n \in \mathbb{N}: (n+1) \cdot m = n \cdot m + m)$  durch „Induktion über  $m$ “.

Induktionsanfang:  $m=1$ .

Zu zeigen ist  $\forall n \in \mathbb{N}: (n+1) \cdot 1 = n \cdot 1 + 1$ .

Sei dazu  $n \in \mathbb{N}$  gegeben. Dann gilt  $(n+1) \cdot 1 = n+1 = n \cdot 1 + 1$ , also  $(n+1) \cdot 1 = n \cdot 1 + 1$ , und dies war zu zeigen. Die Gleichungen gelten aufgrund der Definition der Multiplikation mit dem Faktor 1.

Induktionsschluß. Unter Voraussetzung von  $\forall n \in \mathbb{N}: (n+1) \cdot m = n \cdot m + m$  soll gezeigt werden:

$$\forall n \in \mathbb{N}: (n+1) \cdot (m+1) = n \cdot (m+1) + (m+1).$$

Sei also  $n \in \mathbb{N}$  gegeben. Dann ist

$$(n+1) \cdot (m+1) = (n+1) \cdot S(m) = (n+1) \cdot m + (n+1) = n \cdot m + m + n + 1 = n \cdot m + n + m + 1 = n \cdot (m+1) + (m+1)$$

was zu zeigen war.

Wegen des Assoziativgesetzes der Addition dürfen wir bei Addieren die Klammern weglassen bzw. nach Wunsch klammern. Bei dritten Gleichheitszeichen wurde die Induktionsvoraussetzung benutzt und beim vierten bei der Addition die Summanden  $m, n$  vertauscht, also das Kommutativgesetz der Addition benutzt.