Mathematik I, Logik und Algebra, WS2010/11
M. Hortmann

Blatt 10

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen	Gruppe	Tutor

1a	b	2	3a	b	c	4a	b	5a	b	c	d	e	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8 Punkte=100%	

Aufgabe 1
Eine Matrix, deren Einträge nur aus dem Nullelement der additiven Gruppe des zu Grunde liegenden Rings *R* bestehen, nennt man „Nullmatrix“. Die Nullmatrix mit *n* Zeilen und *n* Spalten ist das neutrale Element der Addition des Matrizenrings $M_n(R)$. Man schreibt einfach das Symbol 0 für die Nullmatrix und muß aus dem Kontext ersehen, wann mit 0 die Nullmatrix und wann das neutrale Element der Addition in *R* oder die ganze Zahl 0 gemeint ist.

a) Finden Sie eine von der Nullmatrix verschiedene Matrix $A \in M_2(\mathbb{Z})$, für die gilt: $A^2 = 0$.
b) Finden Sie eine Matrix $A \in M_3(\mathbb{Z})$ mit $A \neq 0$, $A^2 \neq 0$, $A^3 = 0$.

Aufgabe 2
Finden Sie mit Hilfe des Erw. Euklid. Algorithmus Zahlen $x, y, z \in \mathbb{Z}$, so daß $15x+21y+35z=1$.

Aufgabe 3 Sei *R* ein Ring. Ein Ring ist gegeben durch eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe $(R,+)$ mit dem neutralen Element 0, plus einer weiteren assoziativen Operation, der sogenannten Multiplikation, wobei als Verträglichkeitsbedingungen die beiden Distributivgesetze dazu kommen. Die Multiplikation ist i.a. nicht kommutativ, daher zwei Distributivgesetze.

a) Man zeige: Ist $a \in R$, so ist $a \cdot 0 = 0$. (Genauso ist natürlich $0 \cdot a = 0$.)
b) Man zeige: Sind $a, b \in R$, so ist $(-a)b=-(ab)=a(-b)$. (In Worten: das additiv inverse Element des Produkts *ab* erhält man, indem man das additiv inverse Element von *a* mit *b* multipliziert oder indem man *a* mit dem additiv inversen Element von *b* multipliziert.)
c) Sei *R* Integritätsring, also nullteilerfrei. Seien $a, b, c \in R$ und $a \neq 0$.
Man zeige: Ist $ab=ac$, so folgt $b=c$. (Kürzungsregel)

Bemerkung: in jeder Teilaufgabe arbeitet man gleichzeitig mit der additiven und der multiplikativen Struktur des Rings. Daher muß es zum Einsatz der Distributivgesetze kommen.

Aufgabe 4
Sei R ein Ring mit Eins.
Für $a \in R$ setze man $a^0 := 1$ und rekursiv $a^{n+1} := a^n a$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
Für $0 \in \mathbb{Z}$ und $a \in R$ setze man $0a := 0$ und rekursiv $(n+1)a := na + a$ für $n \in \mathbb{N}_0$ sowie $(-n)a := -(na)$
(Mit demselben Ergebnis hätten wir $(-n)a := n(-a)$ definieren können.) Wir bilden somit Potenzen von Ringelementen, sowie ein „Produkt“ von ganzen Zahlen und Ringelementen.

Durch mehrfache Anwendung der Distributivgesetze erhält man für $a, a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in R$
Formeln wie $a \cdot \left(\sum_{i=0}^{m} b_i \right) = \sum_{i=0}^{m} (a \cdot b_i)$ oder $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j \right) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_i b_j \right) = \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_j \right)$, wobei zum Schluß auch das Kommutativgesetz der Addition in R angewandt wird. Solche Formeln können im Weiteren ohne Beweis benutzt werden. Ebenso:
$\forall\, m, n \in \mathbb{Z}, a, b \in R: (m+n)a = ma + na,\ n(a+b) = na + nb,\ (mn)a = m(na),\ a(nb) = (na)b = n(ab)$
und daraus abgeleitete Formeln. Die zugehörigen Beweise erfordern nur einfache Induktion, ausgehend von den Rechenregeln im Ring.
In einem Ausdruck wie $\sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_j \right)$ läßt man auch die Klammern weg, ebenso in $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j \right)$
.

Seien nun $a, b \in R$ und es gelte $ab = ba$.
a) Man zeige: $\forall\, n \in \mathbb{N}: \ a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i}$
b) Man erinnere sich an die rekursive Definition der Binomialkoeffizenten und zeige:
$\forall\, n \in \mathbb{N}: \ (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$.
Bemerkung: Für $n=2$ handelt es sich bei a) offenbar um die dritte binomische Formel und bei b) um die erste (und auch die zweite: wieso?).

Aufgabe 5 („Forschungsaufgabe“ :-))
Sei $n \in \mathbb{N}$.
a) Welche Ordnung hat die multiplikative Gruppe $\mathbb{Z}_{2^n}^*$? (Begründung!)
b) Man zeige, daß $\mathbb{Z}_8^*$ nicht zyklisch ist.
c) Stellen Sie an Hand von (zu dokumentierenden) Experimenten fest, welche Ordnung ein Element von $\mathbb{Z}_{2^n}^*$ höchstens haben kann.
d) Beschreiben Sie anhand von (zu dokumentierenden) Experimenten die Elemente von $\mathbb{Z}_{2^n}^*$, die die in c) festgestellte maximale Ordnung besitzen.
e) Beweisen Sie Ihr in d) gefundenes Ergebnis!