Mathematik I, Logik und Algebra, WS2010/11
M. Hortmann

Blatt 8

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen											**Gruppe**	**Tutor**
1	2a	b	3a	b	4a	b	c	d	e	f	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8 Punkte=100%	

Aufgabe 1
Man erinnere sich: Für $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $a \% n$ die eindeutig bestimmte Zahl $r \in N_0$, für die gilt: $\exists q \in \mathbb{Z} : a = qn + r$ und $r < n$.
Seien nun $x, y \in Z$, $n \in \mathbb{N}$. Rechnen Sie nach, daß
$(x+y) \% n = ((x \% n) + (y \% n)) \% n$ und $(x \cdot y) \% n = ((x \% n) \cdot (y \% n)) \% n$.

Man erinnere sich an die Definition des Begriffs „Normalteiler“: Ist *G* eine Gruppe und *H* eine Untergruppe, so heißt *H* Normalteiler in *G*, wenn $\forall\, x \in G\ \forall\, h \in H:\ \ x^{-1} h x \in H$.

Aufgabe 2
G sei eine Gruppe, *H* eine Untergruppe.

a) In *G* gebe es bzüglich *H* genau zwei verschiedene Linksnebenklassen *xH* und *yH* . Man zeige, daß unter dieser Bedingung *H* Normalteiler in *G* ist.

b) Für $x \in G$ definiert man $Hx := \{hx \mid h \in H\}$ und spricht von einer „Rechtsnebenklasse“.
Man zeige: *H* ist genau dann Normalteiler in *G*, wenn jede Linksnebenklasse von *H* auch Rechtsnebenklasse ist.

Aufgabe 3
Betrachten Sie die Untergruppen $H := \{(1\,2\,3), (3\,2\,1)\}$ und $K := \{(1\,2\,3), (2\,3\,1), (3\,1\,2)\}$ der Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_3$.
a) Zeigen Sie, daß die Untergruppe *H* kein Normalteiler in $\mathfrak{S}_3$ ist.
b) Wieviele Linksnebenklassen in $\mathfrak{S}_3$ besitzt die Untergruppe *K* ?
(Beweis!) Wieso ist *K* Normalteiler?

Aufgabe 4

a) Seien G, H Gruppen, $\varphi: G \to H$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie: Ist G abelsch, so auch H.
b) Warum gibt es keinen Isomorphismus zwischen $(\mathbb{Z}_{24},+)$ und der Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_4$?
c) Die Gruppe G sei zyklisch und besitze m Elemente; x sei ein Erzeuger von G. Zeigen Sie:
$\varphi: \mathbb{Z} \to G$, $n \mapsto x^n$ ist ein Epimorphismus. Was können Sie über $\ker \varphi$ sagen?
d) Geben Sie – möglicherweise mit Hilfe von c) – einen Isomorphismus zwischen $(\mathbb{Z}_6,+)$ und $(\mathbb{Z}_7^*,\cdot)$ an!
e) Warum gibt es keinen Isomorphismus zwischen $(\mathbb{Z}_8,+)$ und $(\mathbb{Z}_9^*,\cdot)$?
f) Warum gibt es keinen Isomorphismus zwischen den Gruppen $(\mathbb{Z}_2,+)\times(\mathbb{Z}_4,+)$ und $(\mathbb{Z}_8,+)$?