Mathematik I, Logik und Algebra, WS2010/11
M. Hortmann

Blatt 7

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen								Gruppe	Tutor
1a	b	c	d	2a	b	3	4	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	1	6 Punkte=100%	

Vorrede zu Aufgabe 1:
Man erinnere sich an die in der Vorlesung gegebene Definition des Gruppenbegriffs:
Eine Gruppe ist eine Menge G zusammen mit einer assoziativen Verknüpfung, für die gilt:
1. Es gibt ein eindeutig bestimmtes Element $e \in G$ mit $\forall\, a \in G : ea = ae = a$.
2. Zu jedem $a \in G$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $b \in G$, so daß $ba = ab = e$.

M.a.W.: es gibt in G ein eindeutig bestimmtes neutrales Element, und zu jedem Element von G gibt es ein eindeutig bestimmtes inverses Element.

Im folgenden geht es darum, daß eine Gruppe bereits durch durch deutlich schwächere Forderungen charakterisiert ist. Dazu zunächst einige Begriffe:

Ist G eine Menge mit einer Verknüpfung, so nennt man ein Element $e \in G$ linksneutral, wenn gilt: $\forall\, a \in G :\ ea = a$. Sind $a, b \in G$ und ist das Produkt ba linksneutral, so nennt man b linksinvers zu a.

Aufgabe 1
Es sei G eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung. In G gebe es ein linksneutrales Element e und zu jedem $a \in G$ gebe es ein linksinverses Element b mit $ba=e$.

Man zeige:
a) Ist $a \in G$ und gilt $ba=e$, so folgt $ab=e$.
b) Ist $a \in G$, so folgt $ae=a$.
c) Gilt $ba=ca=e$, so folgt $b=c$.
d) Sind e, f linksneutral, so folgt $e=f$.[1]

Insgesamt wird damit gezeigt: In G existiert ein eindeutig bestimmtes neutrales Element, und zu jedem Element von G gibt es ein eindeutig bestimmtes Inverses. G ist also eine Gruppe.

---
1 Dabei kann man bei jeder Teilaufgabe das Ergebnis der vorherigen Teilaufgabe verwenden.

Aufgabe 2

a) Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \geqslant n$. Man setze $\binom{m}{0} := \binom{m}{m} := 1$ und rekursiv $\binom{m+1}{n+1} := \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1}$.
Außerdem setze man $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} := \frac{m!}{n!(m-n)!}$.

Man zeige jetzt durch Induktion über m, daß $\binom{m}{n} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$.

b) Bearbeiten Sie α) oder β):
α) Sei M eine endliche Menge, $|M| = m$ und $0 \leqslant n \leqslant m$.
Man zeige durch Induktion über m: es gibt $\binom{m}{n}$ n-elementige Teilmengen von M.

β) Verifizieren Sie für m=7, n=4 die Behauptung von α) anhand der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$!

Aufgabe 3
Finden Sie eine 4-elementige und eine 5-elementige Untergruppe von Z_{25}^* und stellen Sie die zugehörigen Gruppentafeln für die gefundenen Untergruppen auf[2].

Aufgabe 4
Eine Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ heißt Transposition, wenn es Indizes $1 \leqslant i < j \leqslant n$ gibt mit $\pi(i) = j$, $\pi(j) = i$ und $\pi(k) = k$, falls $i \neq k \neq j$. [3]

Schreiben Sie die Permutation (4 1 6 5 7 3 2) als Produkt von Transpositionen!

Freiwillige Sonderaufgabe: Schreiben Sie Code oder Pseudocode, um eine beliebige Permutation in $\mathfrak{S}_n$ als Produkt von Transpositionen darzustellen.

---

2 Hinweis: In Pari können Sie mit Ausdrücken wie $\mathrm{Mod}(2,25)\hat{}3$ oder $\mathrm{Mod}(2,25) * \mathrm{Mod}(3,25)$ in der multiplikativen Gruppe $\mathbb{Z}_{25}^*$ rechnen und somit leichter experimentieren.

3 Z.B. ist (1 2 5 4 3 6 7) eine Transposition in $\mathfrak{S}_7$.