Mathematik I, Logik und Algebra, WS2010/11
M. Hortmann

Blatt 5

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

<table>
<tr><th colspan="9">Namen</th><th>Gruppe</th><th>Tutor</th></tr>
<tr><td colspan="9"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="9"></td></tr>
<tr><td colspan="9"></td></tr>
<tr><td>1a</td><td>b</td><td>2a</td><td>3a</td><td>b</td><td>4a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>Summe</td><td>bearbeitet</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>8 Punkte=100%</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Aufgabe 1
Die Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ seien in Binärdarstellung gegeben, a=11100110, b=10001.
Man führe die folgenden Rechnungen vollständig per Hand im Binärsystem durch und dokumentiere die gesamte Rechnung:

a) Man berechne das Produkt $a \cdot b$.
b) Man führe die Division mit Rest mit dem Dividenden a und dem Divisor b durch, um zur eindeutigen Darstellung $a = qb + r$, $0 \leqslant r < b$ zu gelangen.
c) Freiwillige Sonderaufgabe: man beschreibe den Algorithmus „Division mit Rest im Binärsystem" in Pseudocode oder in Pari.

Aufgabe 2
Sei $a \in \mathbb{N}$. Offenbar ist $a^{13} = \left((a^2 \cdot a)^2\right)^2 \cdot a$, dabei wurde die Potenz a^{13} mit nur 5 Multiplikationen berechnet: 1. $b := a \cdot a$, 2. $c := b \cdot a$, 3. $d := c \cdot c$, 4. $e := d \cdot d$, 5. $e \cdot a = a^{13}$.

a) Finden Sie in ähnlicher Weise eine Darstellung von a^{20} mit ebenfalls nur 5 Multiplikationen.

b) Freiwillige Sonderaufgabe: Man beschreibe einen Algorithmus in Pseudocode oder Pari, welcher eine Potenz a^k mit möglichst wenig Multiplikationen berechnet.

Aufgabe 3
Man zeige durch Induktion:
a) $\forall n \in \mathbb{N}: \; n \geqslant 3 \;\Rightarrow\; 2n + 1 \leqslant 2^n$
b) $\forall n \in \mathbb{N}: \; n \geqslant 4 \;\Rightarrow\; n^2 \leqslant 2^n$

Aufgabe 4
Die Menge der natürlichen Zahlen inklusive der Null bezeichnen wir mit $\mathbb{N}_0$. Auf dieser Menge seien Addition und Multiplikation wie in der Vorlesung rekursiv definiert. Assozitativgesetze und Kommutativgesetze der Addition und Multiplikation in $\mathbb{N}_0$ sowie das Distributivgesetz seien im Folgenden vorausgesetzt. Der Begriff der Subtraktion soll aber nicht benutzt werden.

Auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ wird durch $(n,m) \sim (k,l) :\Leftrightarrow n+l = k+m$ eine Äquivalenzrelation definiert.

a) Weisen Sie für ~ alle Eigenschaften einer Äquivalenzrelation nach.

b) Machen Sie sich ein Bild von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ als quadratisches Punktemuster und zeichnen Sie die Äquivalenzklassen[1] von (2,4), (0,0) und (4,2) in dieses Bild ein.

Man bilde die Menge $\boldsymbol{Z} := \{\overline{(n,m)} \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$ aller Äquivalenzklassen bezüglich obiger Äquivalenzrelation. Nach b) sollte man eine geometrische Vorstellung von dieser Menge haben.
Für *x*, *y* in $\boldsymbol{Z}$, $x = \overline{(n_1, m_1)}, y = \overline{(n_2, m_2)}$ werde definiert: $x + y := \overline{(n_1 + n_2, m_1 + m_2)}$.

c) Finden Sie zu $x = \overline{(n,m)}$ ein $y = \overline{(k,l)}$ mit $x + y = \overline{(0,0)}$.

d) Zeigen Sie, daß das Element *y* aus c) eindeutig bestimmt ist[2].

e) Freiwillige Sonderaufgabe: Wie würden Sie $x \cdot y$ definieren?

---

1 Die Äquivalenzklasse von (*n*,*m*) ist offenbar die Menge $\overline{(n,m)} = \{(k,l) \mid n+l = k+m\} \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

2 d.h. es ist zu zeigen: wenn $x + y = \overline{(0,0)}$ und $x + z = \overline{(0,0)}$ dann *y*=*z*. Beachten Sie dabei, daß *y*,*z* selbst Restklassen sind, also z.B. $y = \overline{(k,l)}$, $z = \overline{(k',l')}$ sind, demnach Mengen, und daher die Gleichheit zweier Mengen zu zeigen ist.