Mathematik I, Logik und Algebra, WS2010/11
M. Hortmann

Blatt 4

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen								Gruppe	Tutor
1	2	3a	b	c	4a	b	c	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	1	8 Punkte	

Bei Aufgabe 1 sollen nur die Peano-Axiome und die rekursive Definition der Addition benutzt werden, bei Aufgabe 2 auch das Assozitativgesetz der Addition, bei Aufgabe 3 zusätzlich das in Aufgabe 2 bewiesene Kommutativgesetz der Addition, bei Aufgabe 4 die Assoziativgesetze und Kommutativgesetze der Addition und Multiplikation, sowie ggf. das Distributivgesetz.

Aufgabe 1
Man zeige: Ist $n \in \mathbb{N}$ und $n \neq 1$, so gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $m+1=n$.

Aufgabe 2
Man setze $E(n): \Leftrightarrow \ \forall m \in \mathbb{N}: \ m+n=n+m$ und beweise durch Induktion $\forall n \in \mathbb{N}: \ E(n)$, also das Kommutativgesetz der Addition.

Aufgabe 3
Für $n, m \in \mathbb{N}$ wird definiert: $n<m :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}: n+k=m$

Man zeige

a) durch Induktion $\forall n \in \mathbb{N}: \ \neg(n<n)$
b) (ohne Induktion) $\forall n, m, k \in \mathbb{N}: \ (n<k \text{ und } k<m) \Rightarrow n<m$
Bemerkung: Setzt man $n \leqslant m :\Leftrightarrow (n=m \text{ oder } n<m)$, so folgt aus a) und b) sofort, daß durch $\leq$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ definiert wird.

c) Man zeige durch Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}: \ (\forall m \in \mathbb{N}: \ m<n \text{ oder } m=n \text{ oder } n<m)$
Bemerkung: dies bedeutet, daß die durch $\leq$ gegebene Ordnung auf $\mathbb{N}$ total ist.

Aufgabe 4

Für $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{i=1}^{n} a_i$ rekursiv definiert durch $\sum_{i=1}^{1} a_i := a_1$ und falls $k<n$ $\sum_{i=1}^{k+1} a_i := \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \right) + a_{k+1}$.

a) Man setze 2:=(1+1) und zeige durch Induktion $\forall\, n \in \mathbb{N}\colon\ \sum_{i=1}^{n} (2 \cdot i) = n \cdot (n+1)$.

b) Zu $a \in \mathbb{N}$ definiere man rekursiv $a^1 := a$, $a^{n+1} := a^n \cdot a$ und zeige durch Induktion $2 + \sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1}$.

Zu jeder nicht-leeren endlichen Menge *M* gibt es eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl *n*, so daß gilt: es gibt eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N}_n \to M$. Wir schreiben $|M|$ für diese Zahl, bei der es sich offenbar um die Anzahl der Elemente von *M* handelt. Ist *K* eine weitere nicht-leere endliche Menge, so gilt: $K \cap M = \emptyset \Rightarrow |K \cup M| = |K| + |M|$ und $|K \times M| = |K| \cdot |M|$.

c) Man zeige jetzt durch Induktion über *n*: Ist *M* eine *n*-elementige Menge, so besitzt die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ 2^n Elemente.