Mathematik I, Logik und Algebra, WS2010/11
M. Hortmann

Blatt 3

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen							Gruppe	Tutor
1a	b	c	2	3	4a	b	**Summe**	**bearbeitet**
2	1	1	1	1	1	1	8 Punkte=120%	

Aufgabe 1
Sei M eine Menge. Eine Relation $R \subset M \times M$ heißt Äquivalenzrelation auf M, wenn gilt:

$\forall x \in M: \quad xRx$	Reflexivität
$\forall x, y \in M: \quad xRy \rightarrow yRx$	Symmetrie
$\forall x, y, z \in M: \quad (xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$	Transitivität.

(Erinnern Sie sich, daß die Schreibweise xRy bedeutet, daß $(x, y) \in R$.)

Zu jedem $x \in M$ definiert man die Menge $\bar{x} := \{ y \in M \mid yRx \}$ und nennt $\bar{x}$ die Äquivalenzklasse von x.

a) Sei $R \subset M \times M$ eine Äquivalenzrelation.
Zeigen Sie, daß die Aussagen $\bar{x} = \bar{y}$ und xRy äquivalent sind.
Zeigen Sie auch, daß $\neg(xRy)$ äquivalent ist zu $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$.

b) Nach a) bildet die Menge der Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation eine Menge, deren Elemente paarweise disjunkt[1] sind. Ist andererseits $\mathfrak{N}$ eine Menge paarweise disjunkter Mengen, so bilde man deren Vereinigung durch $M := \bigcup \mathfrak{N}$, setze $R := \left\{ (a, b) \in M \times M \,\middle|\, \exists\, K \in \mathfrak{N}: a, b \in K \right\}$ und zeige: R ist eine Äquivalenzrelation auf M[2].

c) Sei $M = \{a, b, c\}$ eine dreielementige Menge. Finden Sie alle Äquivalenzrelationen auf M und schreiben Sie diese Mengen vollständig hin!

---

1 d.h. $\forall x, y \in M: x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset$

2 Umgangssprachlich bedeutet dies: Gegeben sei eine Menge von Dingen, die in getrennten Haufen liegen. (Nennt man die Menge der Haufen $\mathfrak{N}$, so ist die Menge der Dinge in allen Haufen gerade $\bigcup \mathfrak{N}$.) Man erhält eine Äquivalenzrelation, indem man zwei Dinge im selben Haufen für äquivalent erklärt. Jeder Haufen bildet dann eine Äquivalenzklasse.

Aufgabe 2

Sei M eine Menge. Eine Relation $R \subset M \times M$ heißt Ordnung(srelation) auf M, wenn gilt:

$\forall x \in M: \quad xRx$	Reflexivität
$\forall x, y \in M: ((xRy \wedge yRx) \rightarrow (x=y))$	Identitivität
$\forall x, y, z \in M: \ (xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$	Transitivität.

Gilt zusätzlich noch $\forall x, y \in M: xRy \vee yRx$, so heißt die Ordnung total.

Sei $M = \{a, b, c\}$ eine dreielementige Menge. Finden Sie alle Ordnungsrelationen auf M und schreiben Sie diese Teilmengen von $M \times M$ vollständig hin. Welche dieser Ordnungen sind total?

Aufgabe 3

Seien M, N Mengen. Eine Relation $F \subset M \times N$ heißt „Funktion" , wenn gilt:
$\forall (a, b), (c, d) \in F: ((a=c) \Rightarrow (b=d))$

Seien nun die dreielementige Menge $M = \{a, b, c\}$ und die zweielementige Menge $N = \{1,2\}$ gegeben.

Schreiben Sie alle Teilmengen $F \subset M \times N$ hin, welche Funktionen sind!

Hinweis: Auch $\emptyset$ erfüllt die Definitionsbedingung für „Funktionen" und ist daher eine von ihnen.

Aufgabe 4

Seien M, N Mengen, $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung. Die Abbildung $\Phi: \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathcal{P}(M)$ sei gegeben durch $N \supset K \mapsto f^{-1}(K) \subset M$. Man zeige:

a) ist f injektiv, so ist Φ surjektiv
b) ist Φ surjektiv, so ist f injektiv