Mathematik I, Logik und Algebra, WS2010/11
M. Hortmann

Blatt 1

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

<table>
<tr><th colspan="4">Namen</th><th>Gruppe</th><th>Tutor</th></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>Summe</td><td>bearbeitet</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>4 Punkte=120%</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Aufgabe 1

Zeigen Sie, daß die Aussagenverknüpfungen
a) $\left(\neg(A\vee B)\right)\leftrightarrow\left((\neg A)\wedge(\neg B)\right)$
b) $\left((A\wedge C)\vee(B\wedge C)\right)\leftrightarrow\left((A\vee B)\wedge C\right)$
Tautologien sind, d.h. daß die Wahrheitstabellen dieser Ausdrücke in der letzten Spalte ausschließlich den Eintrag *w* enthalten.

Aufgabe 2

Seien A,B Aussagen.
Die Aussagenverknüpfung $A\otimes B$ sei durch folgende Wahrheitstafel definiert:

A	B	$A\otimes B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	w

Man versuche, ausgehend von A und B ausschließlich mit Hilfe der Verknüpfung $\otimes$ gebildete Ausdrücke herzustellen, deren Wahrheitstafel gleich der von $A\wedge B$, $A\vee B$ und $A\rightarrow B$ ist.
(Beispielsweise besitzt $\neg A$ dieselbe Wahrheitstafel wie $A\otimes A$.)

Aufgabe 3

Finden Sie eine Verknüpfung der Aussagen *A,B,C* mit Hilfe der Operationen $\neg, \wedge, \vee$, so daß sich folgende Wahrheitstafel ergibt:

A	***B***	***C***	***?***
f	*f*	*f*	*w*
f	*f*	*w*	*f*
f	*w*	*f*	*w*
f	*w*	*w*	*w*
w	*f*	*f*	*f*
w	*f*	*w*	*w*
w	*w*	*f*	*w*
w	*w*	*w*	*f*

Bemerkung 1: Die Einträge in der letzten Spalte wurden zufällig gewählt!
Bemerkung 2: Man kann die obige Tabelle als „Wahrheitsfunktion" interpretieren. Man kann zeigen, daß jede Wahrheitsfunktion mit Hilfe der Konjunktionen $\neg, \wedge, \vee$ ausgedrückt werden kann, nach Aufg. 2) sogar ausschließlich mit Hilfe von $\otimes$ (NAND).

Aufgabe 4

Die Zahlen *n*=0, 1, 2 , 3, 4, 5, 6, 7 lassen sich darstellen als $n=A_0+2\cdot A_1+4\cdot A_2$ mit eindeutig bestimmten Elementen $A_0, A_1, A_2 \in \{0, 1\}$.

Für $n_1, n_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ reicht eine „zweistellige" Darstellung: $n_1=A_0+2\cdot A_1$, $n_2=B_0+2\cdot B_1$.
Man bilde nun die Summe $n_1+n_2=:n_3=C_0+2\cdot C_1+4\cdot C_2$.

Identifizieren Sie nun die Zahl 0 mit dem Wahrheitswert *f* und die Zahl 1 mit dem Wahrheitswert *w*, und berechnen Sie die Wahrheitstabellen für C_0, C_1, C_2 in Abhängigkeit von A_0, A_1, B_0, B_1 .
Drücken Sie dann C_0, C_1, C_2 durch Verknüpfungen von A_0, A_1, B_0, B_1 mittels $\neg, \wedge, \vee$ aus.
(Beispielsweise ergibt sich $C_0 \leftrightarrow \big(\big(A_0 \wedge (\neg B_0) \big) \vee \big((\neg A_0) \wedge B_0 \big) \big)$.)

Bemerkung: Letztlich geht um die Addition zweistelliger Zahlen im Stellensystem zur Basis 2:

	A_1	A_0
+	B_1	B_0
C_2	C_1	C_0

, zum Beispiel

	1	1
+	0	1
1	0	0

.

Die Aufgabe soll zeigen, wie im Prinzip die Addition natürlicher Zahlen mittels logischer Operationen erfolgen kann.