Aufgabe 1

Sei $A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^3$.

Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}_5^4$ des linearen Gleichungssystems $Ax=b$.

Aufgabe 2

Gegeben sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := Ax$, wobei $A = (1, 2, 3) \in M_{1\times 3}(\mathbb{R})$.

a) Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums $U := \ker(f) \subset \mathbb{R}^3$.
b) Verwandeln Sie diese Basis mit dem Gram-Schmidt-Verfahren in eine Orthonormalbasis von U.

Aufgabe 3

Gegeben sei die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} -5/8 & -3\sqrt{3}/8 & \sqrt{3}/4 \\ 3\sqrt{3}/8 & -1/8 & -3/4 \\ \sqrt{3}/4 & -3/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Man rechnet leicht nach, daß die Spalten dieser Matrix ein Orthonormalsystem bilden, d.h. die Matrix A ist orthogonal.

Ihre Aufgabe: Geben Sie A^{-1} an und begründen Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in M_{5\times 5}(\mathbb{Q})$

Aufgabe 5

a) Sei $L \subset \mathbb{R}$ und es sei $x \in \mathbb{R}$. Was bedeutet: "x ist das Supremum von L." ?
(M.a.W. Geben Sie die Definition!)

b) Sei (M,d) ein metrischer Raum und $U \subset M$.
Was bedeutet: "U ist offen"?

c) Sei $\mathbb{R}^2$ versehen mit der durch das übliche Skalarprodukt gegebenen Norm und der durch diese Norm gegebenen Metrik. Man betrachte die Menge $A := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| > 1\}$ und zeige: A ist offen .

Aufgabe 6

Zeigen Sie, daß für $z=\frac{1}{2}+\frac{i}{3}$ die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}$ absolut konvergiert.

Aufgabe 7

Gegeben sei eine offene Teilmenge $U\subset\mathbb{R}^n$, eine Abbildung $f:U\to\mathbb{R}$, und ein Punkt $x_0\in U$.

a) Was bedeutet: f ist in x_0 differenzierbar?

b) Wie sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ definiert?

c) Sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z)=(\sin(x)+\cos(y)+z)^2$.
Berechnen Sie die Ableitung von f im Punkt $(\pi/2,\pi,0)$.

d) Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen, $f,g:U\to\mathbb{R}$ seien im Punkt $x_0\in U$ differenzierbar.
Dann ist auch gemäß der Produktregel $h:=(f\cdot g)$ in x_0 differenzierbar.

Ihre Aufgabe:
Drücken Sie die Ableitung $Dh(x_0)$ mit Hilfe der Ableitungen von f und von g im Punkt x_0 aus, d.h. schreiben Sie die Formel der Produktregel hin.

e) Seien $U\subset\mathbb{R}^n$ und $V\subset\mathbb{R}^m$ offen.
$f:U\to V$ sei im Punkt $x_0\in U$ differenzierbar, $g:V\to\mathbb{R}^k$ sei in $f(x_0)$ differenzierbar.

Formulieren Sie die Kettenregel der Differentialrechnung für die Abbildung $g\circ f$.

Aufgabe 8

Beweisen Sie mit Hilfe der Ihnen bekannten Differentiationsregeln die Formel
$\tan'(x)=1+\tan^2(x)$. Erinnern Sie sich, daß $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Aufgabe 9

Berechnen Sie mit der Regel von l'Hôpital den Grenzwert $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}$.
Wieso sind die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Regel erfüllt?

Aufgabe 10

Gegeben sei die Abbildung $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x):=x^4-2\cdot x^2$.
Berechnen Sie die drei Punkte, an denen f einen lokalen Extremwert, also ein lokales Maximum oder lokales Minimum besitzen könnte.