Die Produktregel der Differentialrechnung

Wir beschränken uns hier auf die

Produktregel für reellwertige differenzierbare Funktionen

Sei dazu U eine offene Teilmenge eines Banachraums E, $f, g: U \to \mathbb{R}$ seien zwei im Punkte $x_0 \in U$ differenzierbare Funktionen. Dann ist auch die durch $h(x) := f(x)g(x)$ gegebene Funktion $h: U \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, und es gilt:

$Dh(x_0) = f(x_0)Dg(x_0) + g(x_0)Df(x_0)$, bzw. unter Benutzung der Notation $f'(x_0) := Df(x_0)$
$h'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$

Man erinnere sich, daß die Ableitungen $Dh(x_0)$, $Df(x_0)$ und $Dg(x_0)$ stetige lineare Abbildungen $E \to \mathbb{R}$ sind. Im Falle $E = \mathbb{R}^n$ identifizieren wir diese Abbildungen mit den zugehörigen Matrizen, die aus einer Zeile und *n* Spalten bestehen. Ist U ein Intervall in $\mathbb{R}$, so handelt es sich bei $f'(x_0)$ und $g'(x_0)$ um 1x1-Matrizen, also Zahlen, so daß man in der obigen Formel möglicherweise die aus der Schule bekannte Produktregel erkennt.

Beispiel:

Die Multiplikation selbst ist eine Abbildung $\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, also $\Phi(x, y) = xy$. Es ist somit $\Phi = f\, g$, wobei $f(x, y) = x$ und $g(x, y) = y$. Die beiden Abbildungen *f*,*g* sind offenbar linear, also in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar, und es gilt $Df(x_{0,} y_0) = f$ und $Dg(x_{0,} y_0) = g$. Man beachte, daß *f* die Matrixdarstellung (1,0) und *g* die Matrixdarstellung (0,1) besitzt. Wenn die obige Produktregel stimmt, erhält man demnach

$$D\Phi(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)Dg(x_0, y_0) + g(x_0, y_0)Df(x_0, y_0) = x_0 g + y_0 f = x_0(0{,}1) + y_0(1{,}0) = (y_0, x_0)$$

Dieses Ergebnis erhält man aber auch über partielle Ableitungen, denn als Polynom 2. Grades in zwei Variablen ist Φ beliebig oft partiell differenzierbar, daher differenzierbar und es gilt:
$D\Phi(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0)\right) = (y_0, x_0)$.

Im Prinzip läßt sich nun die obige Produktregel aus diesem Beispiel und der Kettenregel folgern: Seien wieder U eine offene Teilmenge eines Banachraums E und $f, g: U \to \mathbb{R}$ zwei im Punkte $x_0 \in U$ differenzierbare Funktionen. Wir wissen bereits, daß die Funktion $H: U \to \mathbb{R}^2$, die durch $x \to \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$ gegeben ist, in x_0 differenzierbar ist und die Ableitung dort die Form
$DH(x_0) = \begin{pmatrix} Df(x_0) \\ Dg(x_0) \end{pmatrix}$ besitzt, also durch eine zweizeilige Matrix mit *n* Spalten dargestellt wird.

Offenbar ist jetzt $h = \Phi \circ H$ und daher gilt nach Kettenregel
$Dh(x_0) = D\Phi(H(x_0)) \circ DH(x_0) = (g(x_0), f(x_0))\begin{pmatrix} Df(x_0) \\ Dg(x_0) \end{pmatrix} = g(x_0)Df(x_0) + f(x_0)Dg(x_0)$.

Da wir keinen formalen Beweis für die Kettenregel durchgeführt hatten, soll wenigstens für die obige Produktregel einer erbracht werden:

Sei also wieder U eine offene Teilmenge eines Banachraums E, $f, g : U \to \mathbb{R}$ seien zwei im Punkte $x_0 \in U$ differenzierbare Funktionen.

Damit sind die Ableitungen $Df(x_0), Dg(x_0)$ stetige lineare Abbildungen $U \to \mathbb{R}$, und es gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)|}{\|x - x_0\|} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|g(x) - g(x_0) - Dg(x_0)(x - x_0)|}{\|x - x_0\|} = 0$$ [1]

Wir wollen zeigen, daß auch die durch $h(x) := f(x) g(x)$ gegebene Funktion $h : U \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar ist, und daß gilt $Dh(x_0) = f(x_0) Dg(x_0) + g(x_0) Df(x_0)$.

Es ist also unter Benutzung dieses Ausdrucks für $Dh(x_0)$ zu zeigen:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|h(x) - h(x_0) - Dh(x_0)(x - x_0)|}{\|x - x_0\|} = 0$$

Wie in solchen Fällen üblich rechnen wir erstmal drauflos und kümmern uns zwischendurch um die fällig werdenden Abschätzungen:

$$|h(x) - h(x_0) - Dh(x_0)(x - x_0)| = |h(x) - h(x_0) - f(x_0) Dg(x_0)(x - x_0) - g(x_0) Df(x_0)(x - x_0)| =$$
$$|f(x) g(x) - f(x_0) g(x_0) - f(x) g(x_0) + f(x) g(x_0) - f(x_0) Dg(x_0)(x - x_0) - g(x_0) Df(x_0)(x - x_0)|$$

Dabei wurde ein Term eingefügt und gleich wieder abgezogen, damit man ausklammern kann.
Es ergibt sich dann (man führe Buch über jeden Summanden):

$$|f(x) g(x) - f(x_0) g(x_0) - f(x) g(x_0) + f(x) g(x_0) - f(x_0) Dg(x_0)(x - x_0) - g(x_0) Df(x_0)(x - x_0)| =$$
$$\Big| f(x)\big(g(x) - g(x_0) - Dg(x_0)(x - x_0)\big) + g(x_0)\big(f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\big) +$$
$$\big(f(x) - f(x_0)\big) Dg(x_0)(x - x_0)\Big|$$

Diesen Ausdruck schätzen wir ab durch

$$|f(x)|\,\big|g(x) - g(x_0) - Dg(x_0)(x - x_0)\big| +$$
$$|g(x_0)|\,\big|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\big| +$$
$$|\big(f(x) - f(x_0)\big)|\,\|Dg(x_0)\|\,\|x - x_0\|$$

Division durch $\|x - x_0\|$ ergibt

$$|f(x)| \frac{\big|g(x) - g(x_0) - Dg(x_0)(x - x_0)\big|}{\|x - x_0\|} +$$
$$|g(x_0)| \frac{\big|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\big|}{\|x - x_0\|} +$$
$$|\big(f(x) - f(x_0)\big)|\,\|Dg(x_0)\|$$

1 Man beachte, wieviele Epsilons und Deltas durch diese Schreibweise gespart werden.

Wegen der Stetigkeit von *f* in x_0 ist $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Es folgt

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| \frac{|g(x) - g(x_0) - Dg(x_0)(x - x_0)|}{\|x - x_0\|} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} |g(x_0)| \frac{|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)|}{\|x - x_0\|} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} |(f(x) - f(x_0))| \, \|Dg(x_0)\| = 0$$

und daher gilt auch schon anfangs:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|h(x) - h(x_0) - Dg(x_0)(x - x_0)|}{\|x - x_0\|} = 0$$

Dabei wurde die einfach zu beweisende und intuitiv klare Tatsache benutzt:
Sind u,v positive Funktionen und gilt $u \leqslant v$ und ist $\lim_{x \to x_0} v(x) = 0$, so ist auch $\lim_{x \to x_0} u(x) = 0$.

Erinnern Sie sich, daß die Schreibweise $\lim_{x \to x_0} u(x) = 0$ nur eine Abkürzung ist für
$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x$ im Definitionsbereich von u: $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|u(x)\| < \epsilon$.