Mittelwertsätze und Taylorformel

Ausgangspunkt ist eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, die auf dem abgeschlossenen Intervall [*a*,*b*] stetig und im Innern, also im offenen Intervall]*a*,*b*[, differenzierbar ist[1].

Satz von Rolle:
Ist $f(a)=f(b)=0$, so gibt es ein $\zeta\in]a,b[$ mit $f'(\zeta)=0$.

Beweis: Wegen der Stetigkeit von *f* auf dem beschränkten abgeschlossenen Intervall gibt es Punkte in [*a*,*b*], in denen *f* maximal bzw. minimal ist. Sind der maximale und der minimale Funktionswert beide 0, so ist die Funktion konstant gleich 0, und die Ableitung ist überall 0, so daß die Aussage des Satzes dann zutrifft.
Also muß der maximale Wert von *f* größer als 0 und/oder der minimale Wert von *f* kleiner als 0 sein. Wir behandeln den ersten Fall, der zweite geht analog. Jedenfalls wird dann der maximale Wert von *f* in einem Punkt $\zeta\in]a,b[$ angenommen, und es gilt $\forall x\in[a,b]:\ f(x)\le f(\zeta)$.
Wäre jetzt $f'(\zeta)\neq 0$, so müßte $f'(\zeta)>0$ oder $f'(\zeta)<0$ gelten. Nehmen wir oBdA den ersten Fall und gehen daher im Folgenden aus von $0<\alpha:=f'(\zeta)=\lim\limits_{x\to\zeta}\dfrac{f(x)-f(\zeta)}{x-\zeta}$.
Man setze jetzt $\epsilon:=\alpha/2$. Wegen der Differenzierbarkeit von *f* im Punkt ζ gibt es ein $\delta>0$, so daß für alle $x\in]a,b[$ mit $|x-\zeta|<\delta$ gilt: $\left|\dfrac{f(x)-f(\zeta)}{x-\zeta}-\alpha\right| < \epsilon$. Daraus folgt für solche *x* $\alpha-\dfrac{f(x)-f(\zeta)}{x-\zeta} < \epsilon$, also $\epsilon < \dfrac{f(x)-f(\zeta)}{x-\zeta}$. Da wir natürlich *x* rechts von ζ liegend, also $x-\zeta>0$ wählen können, folgt $0<(x-\zeta)\epsilon<f(x)-f(\zeta)$, d.h. $f(x)>f(\zeta)$ im Widerspruch zur angenommenen Maximalität von $f(\zeta)$.
Anschaulich gesprochen: die Positivität der Ableitung $f'(\zeta)$ sorgt dafür, daß die Funktion *f* rechts von ζ zunächst größer wird, was aber nicht sein kann, wenn *f* in ζ maximal ist.

1. Mittelwertsatz:
Gegeben sei wieder eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, die auf dem abgeschlossenen Intervall [*a*,*b*] stetig und im offenen Intervall]*a*,*b*[differenzierbar ist.

Dann gibt es einen Punkt $\zeta\in]a,b[$ mit $f'(\zeta)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Beweis: Wir wenden den Satz von Rolle auf die durch $h(x):=f(x)-(x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}-f(a)$ gegebene Funktion an. Offenbar ist $h(a)=h(b)=0$ und *h* ist auf dem abgeschlossenen Intervall stetig und im Innern differenzierbar. Daher gibt es einen Punkt $\zeta\in]a,b[$ mit $h'(\zeta)=0$.
Man rechnet aber sofort nach, daß $0=h'(\zeta)=f'(\zeta)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, und hat so das gewünschte Ergebnis.

Anwendungen: Man sieht sofort, daß daraus folgt: Ist die Ableitung einer differenzierbaren Funktion auf einem Intervall gleich Null, so ist die Funktion konstant. Ist die Ableitung überall nicht-negativ, so ist die Funktion monoton steigend, ist sie überall positiv, so ist die Funktion streng monoton steigend.

---

1 Man kann Funktionen mit dieser Eigenschaft konstruieren, die sich nicht auf ein größeres Intervall differenzierbar fortsetzen lassen!

Z.B. ist die Exponentialfunktion ja für positive Argumente positiv und wegen $\exp(x)\exp(-x)=1$ auch für negative, d.h. positiv auf ganz $\mathbb{R}$. Wegen exp'=exp ist aber auch die Ableitung positiv, also die Exponentialfunktion überall streng monoton steigend. Genauso zeigt man, daß die Sinusfunktion zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ streng monoton steigend ist.

2. Mittelwertsatz
Gegeben sei diesmal zwei Funktionen $f, g:[a, b]\rightarrow\mathbb{R}$, die auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig und im offenen Intervall $]a,b[$ differenzierbar sind, wobei die Ableitung g' nie 0 sei.

Dann gibt es einen Punkt $\zeta\in]a, b[$ mit $\dfrac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Beweis:
Zunächst folgt aus dem ersten Mittelwertsatz, daß $g(b)-g(a)$ nicht Null sein kann, da sonst die Ableitung g' irgendwo 0 sein müßte. Wieder muß eine passende Hilfsfunktion h gebaut werden, und dies ist mit $h(x):=f(x)(g(b)-g(a))-(f(b)-f(a))g(x)+f(b)g(a)-f(a)g(b)$ erreicht: Es ist offenbar $h(a)=h(b)=0$. Damit gibt der Satz von Rolle ein $\zeta\in]a, b[$ mit $h'(\zeta)=0$; man rechnet sofort nach, daß $0=h'(\zeta)=f'(\zeta)(g(b)-g(a))-(f(b)-f(a))g'(\zeta)$, also
$\dfrac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Taylorformel
Gegeben sei diesmal eine n-mal differenzierbare Funktion $f:]a, b[\rightarrow\mathbb{R}$.
Für $x_0\in]a, b[$ setzen wir $(T_{x_0}^n f)(x):=\sum_{i=0}^{n}\dfrac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$ und nennen diesen Ausdruck das n-te Taylorpolynom von f im Punkt x_0.

Setzt man $R_{n+1, f, x_0}(x):=f(x)-(T_{x_0}^n f)(x)$, so kann man häufig zeigen, daß $\lim_{n\rightarrow\infty} R_{n+1, f, x_0}(x)=0$ und hat dann $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. Die Reihe rechts nennt man auch die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0. Wenn also das Restglied den Grenzwert 0 besitzt, wird die Funktion durch ihre Taylorreihe dargestellt. Dies ist für Polynome und alle Funktionen der Fall, die durch Potenzreihen darstellbar sind. Man zeigt auch recht leicht, daß die Potenzreihe, die eine Funktion darstellt, gleich ihrer Taylorreihe ist.

Man rechnet für die Taylorpolynome sofort nach, daß

$$\left(T_{x_0}^n f\right)'(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}i(x-x_0)^{i-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}i(x-x_0)^{i-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{(i-1)!}(x-x_0)^{i-1}=$$
$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i+1)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f'^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i=(T_{x_0}^{n-1}f')(x)$$

d.h. die Ableitung des n-ten Taylorpolynoms ist gleich dem (n-1) Taylorpolynom der Ableitung.

Im Folgenden eine genauere Beschreibung des Restglieds:
Ist f (n+1)-mal differenzierbar, so gilt für jedes $x\in]a,$ b[die "Taylorformel":

$$\boxed{f(x)=(T_{x_0}^n f)(x) \ + \ \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}\text{, wobei } \zeta \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x \text{ liegt.}$$

Für n=0 ist $T^0_{x_0} f = f(x_0)$, und wir haben nach dem 1. Mittelwertsatz $f(x)-f(x_0)=f'(\zeta)(x-x_0)$ also $f(x)=f(x_0)+f'(\zeta)(x-x_0)$, also die Taylorformel.

Für größeres n betrachten wir zunächst $\dfrac{f(x)-(T^n_{x_0} f)(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{u(x)-u(x_0)}{v(x)-v(x_0)}$, dabei ist $u(x_0)=v(x_0)=0$. Dies erlaubt eine wiederholte Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes:

$$\frac{f(x)-(T^n_{x_0} f)(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{1}{n+1}\frac{f'(\zeta_1)-(T^{n-1}_{x_0} f')(\zeta_1)}{(\zeta_1-x_0)^n}=\frac{1}{(n+1)n}\frac{f'(\zeta_2)-(T^{n-2}_{x_0} f^{(2)})(\zeta_2)}{(\zeta_2-x_0)^{n-1}}=\ldots=$$
$$\frac{1}{(n+1)!}\frac{f^n(\zeta_n)-T^0_{x_0} f^n}{(\zeta_n-x_0)^1}=\frac{1}{(n+1)!}\frac{f^{n+1}(\zeta_{n+1})}{(\zeta_n-x_0)^0}=\frac{1}{(n+1)!}f^{n+1}(\zeta_{n+1})$$

Dabei liegt ζ_1 zwischen x und x_0 , ζ_2 zwischen ζ_1 und x_0 , etc.

Insgesamt ergibt sich

$\dfrac{f(x)-T^n_{x_0} f}{(x-x_0)^{n+1}} = \dfrac{1}{(n+1)!}f^{n+1}(\zeta_{n+1})$ und damit die obige Taylorformel.

Die Taylorformel erlaubt es, bei Kenntnis der höheren Ableitungen die Differenz zwischen dem Taylorpolynom und der gegebenen Funktion abzuschätzen.

Z.B. ist die Differenz $\exp(x)-\sum_{i=0}^{n}\dfrac{x^i}{i!}$ für 0<x<1 kleiner als $\dfrac{e}{(n+1)!}$.
Man weiß also, wie weit man die Exponentialreihe ausrechnen muß, um garantiert eine vorgegebene Approximationsgenauigkeit zu erzielen.

Regel von l'Hopital

Sei I ein offenes Intervall, $f, g: I\to\mathbb{R}$ seien differenzierbar, es sei $x_0\in I$, es gelte $f(x_0)=g(x_0)=0$ und die Ableitung von g sei in I nirgends Null. Wenn dann der Grenzwert $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann auch der Grenzwert $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, und sie sind gleich, also

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ ^{2}$$

Bemerkung: Häufig stellt man die Existenz des Grenzwerts auf der rechten Seite erst durch eine oder mehrere neuerliche Anwendungen der Regel von l'Hopital fest.

Beweis:

2 Eine derartige Gleichung ist grundsätzlich immer so zu lesen: Wenn der Grenzwert rechts existiert, dann existiert auch der Grenzwert links, und sie sind gleich.

Nach dem zweiten Mittelwertsatz erhält man für $x \in I$, $x \neq x_0$ die Gleichung
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}$ für einen Punkt ζ zwischen x_0 und x.

Wenn nun $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a$ existiert, so heißt dies:

I) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I: \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - a \right| < \epsilon$.

Zu zeigen ist
II) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I: \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - a \right| < \epsilon$

Gibt man also $\epsilon > 0$ vor, so wähle man δ lt. I) möglich. Ist dann $x \in I$ und $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, so hat man nach dem zweiten Mittelwertsatz die Gleichung $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}$ für einen Punkt ζ zwischen x_0 und x. Für diesen ist auch $0 < |\zeta - x_0| < \delta$, und daher gilt wegen I)
$\left| \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - a \right| < \epsilon$, und wegen der obigen Gleichung $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - a \right| < \epsilon$.
Letzteres war aber für die Gültigkeit von II) zu zeigen.

Beispiel

Sei $x_0 := 0$, $f(x) = 2\mathrm{x} - \sin(2x)$, $g(x) = x^2 \sin x$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2 - 2\cos(2x) \\
f''(x) &= 4\sin(2x) \\
f'''(x) &= 8\cos(2\mathrm{x}) \\
g'(x) &= 2x\sin(x) + x^2\cos(x) \\
g''(x) &= 2x\cos(x) + 2\sin(x) - x^2\sin(x) + 2x\cos(x) \\
g'''(x) &= -2x\sin(x) + 2\cos(x) + 2\cos(x) - x^2\cos(x) - 2x\sin(x) + 2\cos(x) - 2x\sin(x)
\end{aligned}
$$

und daher

$$
\begin{aligned}
0 &= f(0) = f'(0) = f''(0),\; f'''(0) = 8 \\
0 &= g(0) = g'(0) = g''(0),\; g'''(0) = 6
\end{aligned}
$$

Wir können l'Hopital mehrfach anwenden, und erhalten die Gleichungskette

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = 8/6 = 4/3 \; .$$