Gaußscher Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Wir gehen aus vom Gleichungssystem $Ax=b$.
Dabei ist $A \in M_{m \times n}(K)$, $b \in K^m$. Gesucht werden ein oder alle Elemente $x \in K^n$, so daß obige Gleichung erfüllt ist.

1. Fall
Gehen wir dazu zunächst davon aus, daß die Matrix A in Gaußscher Normalform vorliegt, d.h. daß Sie die folgende Blockgestalt hat
$A = \begin{pmatrix} E & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Dabei ist E eine kxk Einheitsmatrix, wobei $0 \leqslant k \leqslant m, n$, C demnach eine Matrix mit k Zeilen und n-k Spalten, die erste Nullmatrix unten hat m-k Zeilen und k Spalten und die zweite m-k Zeilen und n-k Spalten. Man muß hierbei die Grenzfälle k=0 und k=m und k=m mitbedenken.

Es wurde in der Vorlesung gezeigt, daß man die Matrixgleichung $Ax=b$ auch in der Form

$\begin{pmatrix} E & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ schreiben kann, wobei der Vektor x, der ja n Komponenten besitzt, in einen k-komponentigen Teil x_1 und einen n-k-komponentigen Teil x_2 zerlegt wird. Entsprechend denkt man sich den m-komponentigen Vektor b in einen k-komponentigen Teil b_1 und einen m-k-komponentigen Teil b_2 zerlegt.

Man sieht sofort, daß $b_2 = 0$ gelten muß, damit die Gleichung $Ax=b$ überhaupt eine Lösung besitzen kann.

Wählen wir jetzt die Komponenten von x_2 ganz beliebig, so wissen wir durch die Gleichung $E x_1 + C x_2 = b_1$ daß $x_1 = b_1 - C x_2$ gewählt werden muß, damit insgesamt $Ax=b$ gilt. $x_1 = b_1$, $x_2 = 0$ bildet dabei eine besonders leicht ablesbare spezielle Lösung.

Die homogene Gleichung Ax=0 läßt sich jetzt genauso lösen: x_2 wird wieder beliebig gewählt und $x_1 = -C x_2$ gewählt. Denkt man sich die Matrix C, die ja n-k Spalten besitzt, in der Form $C = (c_1, \ldots, c_{n-k})$ geschrieben mit Spalten $c_i \in K^k$, und wählt man für x_2 nacheinander die Basisvektoren $e_1, \ldots, e_{n-k} \in K^{n-k}$, so erhält man mit den Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} -c_1 \\ e_1 \end{pmatrix}, \ldots, v_{n-k} = \begin{pmatrix} -c_{n-k} \\ e_{n-k} \end{pmatrix} \in K^n$ automatisch eine Basis des Kerns von A, der damit n-k dimensional ist.

Wir werden demnächst die Dimensionsformel n= dim ker A + dim Im A beweisen.
Damit gilt dann dim Im A = k .
Im A ist der von den Spaltenvektoren der Matrix A aufgespannte Unterraum von K^m . k=dim Im A ist also die Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A. Diese Zahl k nennt man auch den **Rang der Matrix** und schreibt k=rang(A).

Fassen wir zusammen: Liegt die Matrix A in Gaußscher Normalform vor, so läßt sich sowohl das zugehörige homogene wie inhomogene Gleichungssystem lösen, es läßt sich sofort eine Basis des Kerns von A hinschreiben und man kennt den Rang von A.

2. Fall

Die Matrix A lasse sich durch eine Folge von elementaren Zeilenoperationen in Gaußsche Normalform überführen.

Da die Zeilenoperationen als Multiplikation von A mit quadratischen invertierbaren mxm-Matrizen von links interpretiert werden können, gelangen wir also zu einer Gleichung $M_N \cdot \ldots \cdot M_1 \cdot A = B$, wobei B Gaußsche Normalform besitzt.

Weil die M_i invertierbar sind, gilt ker A = ker B, wir können also aus B wie vorher den Kern von A ablesen und die homogene Gleichung lösen. Auch ist der Rang von B gleich dem Rang von A.

Wollen wir die inhomogene Gleichung $Ax=b$ lösen, so führen wir am Vektor b simultan dieselben elementaren Zeilenumformungen durch wie bei A : $Bx = M_N \cdot \ldots \cdot M_1 A x = M_N \cdot \ldots \cdot M_1 b =: \tilde{b}$

Da B Gaußsche Normalform besitzt, können wir demnach das System $Bx = \tilde{b}$ lösen und haben damit auch eine Lösung von $Ax=b$.

3. Fall

Es kann durchaus passieren, daß der Prozeß, die Matrix A durch eine Folge elementarer Zeilenumformungen in Gaußsche Normalform zu bringen, hakt. In diesem Fall kommt man aber immer mit einer oder mehreren Spaltenvertauschungen weiter und zum Abschluß.

Eine Spaltenvertauschung in der Matrix A stellt sich als Matrixmultiplikation von rechts AV dar, wobei V eine invertierbare nxn-Matrix ist, die der Gleichung $VV=E$ genügt. Man erhält also eine Matrixgleichung $M_N \cdot \ldots \cdot M_1 A V_1 \cdot \ldots \cdot V_M = B$, wobei B wieder Gaußsche Normalform besitzt.

Geht man aus von $Ax = b$, so hat man zunächst wieder $M_N \cdot \ldots \cdot M_1 A x = M_N \cdot \ldots \cdot M_1 b =: \tilde{b}$.

Schreibt man jetzt $x = V_M V_M x = V_{M-1} V_M V_M V_{M-1} x = \ldots = V_1 \cdot \ldots \cdot V_M \cdot V_M \cdot \ldots \cdot V_1 x$ und setzt
$y := V_M \cdot \ldots V_1 x$, so ergibt sich:
$M_N \cdot \ldots \cdot M_1 A x = M_N \cdot \ldots \cdot M_1 A V_1 \cdot \ldots \cdot V_M \cdot V_M \cdot \ldots \cdot V_1 x = B y$ und damit insgesamt
$B y = \tilde{b}$

Die Gleichung $By = \tilde{b}$ läßt sich jetzt lösen, daß ja B in Gaußscher Normalform vorliegt.

Die richtige Lösung x von $Ax=b$ erhalten wir jetzt durch die Gleichung $x = V_1 \cdot \ldots \cdot V_M y$ zurück!!

Im algorithmischen Prozeß der Überführung von A in Gaußsche Normalform und den simultanen Operationen auf dem Vektor b nehmen wir also elementare Zeilenoperationen an A und b vor. Sobald eine Spaltenvertauschung notwendig wird führen wir sie an A durch, ohne b weiter zu berühren. Wir produzieren dann über die erreichte Gaußsche Normalform Lösungen der Gleichung $By = \tilde{b}$, deren Komponenten wir dann in umgekehrter Reihenfolge den Vertauschungen unterziehen, denen wir A unterzogen haben. Auf diese Weise erhalten wir die Lösungen von $Ax=b$.

Beispiel

Wir gehen aus von $K = \mathbb{Z}_5$ und dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir führen die folgenden elementaren Zeilenoperationen und Spaltenvertauschungen durch, um zur Gaußschen Normalform zu kommen. Dabei schleppen wir in der letzten Spalte den Vektor b mit, der bei Spaltenvertauschungen unberührt bleibt:

2	4	0	1	4	3	
2	4	4	2	0	1	
2	4	1	0	4	1	
3	1	1	3	2	1	
						multipliziere jede Zeile mit dem Inversen ihres ersten Elements
1	2	0	3	2	4	
1	2	2	1	0	3	
1	2	3	0	2	3	
1	2	2	1	4	2	
						subtrahiere die erste Zeile von der 2.,3.,4. Zeile
1	2	0	3	2	4	
0	0	2	3	3	4	
0	0	3	2	0	4	
0	0	2	3	2	3	
						jetzt ist die erste Spaltenvertauschung fällig: z.B. 2te Spalte mit 4ter Spalte
1	3	0	2	2	4	
0	3	2	0	3	4	
0	2	3	0	0	4	
0	3	2	0	2	3	
						erzwinge in der zweiten Zeile, daß das zweite Element 1 wird

1	3	0	2	2	4	
0	1	4	0	1	3	
0	2	3	0	0	4	
0	3	2	0	2	3	
						räume die zweite Spalte auf
1	0	3	2	4	0	
0	1	4	0	1	3	
0	0	0	0	3	3	
0	0	0	0	4	4	
						vertausche die dritte und fünfte Spalte
1	0	4	2	3	0	
0	1	1	0	4	3	
0	0	3	0	0	3	
0	0	4	0	0	4	
						räume die dritte Spalte auf
1	0	0	2	3	1	
0	1	0	0	4	2	
0	0	1	0	0	1	
0	0	0	0	0	0	
						die gewünschte Gauß-Normalform ist erreicht, und das System ist lösbar.

Der Rang der Matrix ist also 3.

Bei der Bestimmung einer Basis des Kerns von B erhalten wir zunächst die Vektoren

$$\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}-3\\-4\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Um zu einer Basis des Kerns von A zu kommen, müssen wir aber die vorgenommenen Vertauschungen in umgekehrter Reihenfolge rückgängig machen, also erst die dritte und fünfte Komponente und dann die zweite und vierte dieser Vektoren vertauschen. (Hier kommt es zufällig auf die Reihenfolge nicht an.) Wir erhalten also als Basis des Kerns von A

$$\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$, und man rechnet leicht nach, daß diese Vektoren wirklich im Kern von A liegen.

Zur Lösung des inhomogenen Systems lesen wir aus der letzten Spalte der Tabelle den Vektor $\tilde{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{b}_1\\0\end{pmatrix}$ ab. Daraus formen wir den Vektor $y=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ und unterwerfen diesen ebenfalls den obigen Vertauschungen, so daß wir am Schluß als eine Lösung des inhomogenen Systems den Vektor $x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\\1\end{pmatrix}$ erhalten. Daß dieser tatsächliche eine Lösung von $Ax=b$ darstellt, rechnet man leicht nach.

Alle weiteren Lösungen des Gleichungssystems erhalten wir, indem wir eine beliebige Linearkombination der Basiselemente des Kerns zu dieser speziellen Lösung addieren.