Einige Sätze und Bemerkungen zu Reihen und ein Beweis der Fundamentalgleichung der Exponentialfunktion

Ausgehend von einer Folge (a_n) bildet man die **Folge der Partialsummen** (s_n) durch $s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$.
Man nennt eine solche Partialsummenfolge eine **Reihe** und bezeichnet sowohl sie wie einen etwaigen Grenzwert mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Existiert der Grenzwert, nennen wir die **Reihe konvergent**, sonst **divergent**.

Damit die Partialsummen einen Sinn machen, muß die Ausgangsfolge (a_n) in einer Menge liegen, in der es eine Addition gibt und in der man von konvergenten Folgen reden kann, also z.B. im $\mathbb{R}^n$ mit der vom Skalarprodukt induzierten Norm und Metrik. In der folgenden Diskussion sind die Summanden (a_n) aber immer komplexe Zahlen. Wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ sind natürlich auch reelle Summanden zugelassen; wichtig sind Reihen mit positiven reellen Summanden.

Wenn eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit **positiven** Summanden konvergiert, so schreiben wir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, wenn sie divergiert, schreiben wir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so bilden die Summanden eine Nullfolge, man hat also $a_n \to 0$ und damit auch $|a_n| \to 0$.

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.
Wenn eine Reihe absolut konvergiert, so ist sie auch konvergent.

Beispiele:
Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.
Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.
Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist absolut konvergent für $|z| < 1$ und divergent für $|z| > 1$.
Es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

Das wichtigste Kriterium für absolute Konvergenz ist das folgende **Majorantenkriterium:**
Ist (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und (b_n) eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen und gilt
$\forall\, n \in \mathbb{N}:\ |a_n| \leq b_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nennt man dann eine Majorante für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Durch Vergleich im Majorantenkriteriums mit der geometrischen Reihe erhält man das **Quotientenkriterium:** Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe komplexer Zahlen und gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, so ist die Reihe absolut konvergent.

Man erhält auch: Ist $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, so ist die Reihe divergent, weil dann nämlich die Folge der Summanden keine Nullfolge sein kann.

Das Quotientenkriterium ist gut für **Potenzreihen** anwendbar, d.h. Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dabei sind die Koeffizienten (a_n) komplexe (oder reelle) Zahlen, und für z setzt man ebenfalls komplexe (oder reelle) Zahlen ein.

Wichtige Potenzreihen sind:
Die Exponentialreihe $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.
Die Cosinusreihe $\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ und die Sinusreihe $\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
Diese Reihen konvergieren absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.
Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

Absolut konvergente Reihen haben die wichtige Eigenschaft, daß man sie "umordnen" kann, ohne den Grenzwert zu ändern. Das heißt: Ist $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und $b_n := a_{\sigma(n)}$, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Diese Umordnungsaussage stimmt "absolut nicht" für nicht-absolut konvergente Reihen.

Ähnlich wie den "Umordnungssatz" beweist man z.B. folgenden **Satz über "Doppelreihen"**:
Für $m, n \in \mathbb{N}$ seine komplexe Zahlen c_{mn} gegeben. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien die Reihen $\sum_{m=1}^{\infty} c_{mn}$ absolut konvergent. Ist dann mit $a_n := \sum_{m=1}^{\infty} c_{mn}$ auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so auch alle Reihen $b_m := \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}$ und ebenso $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$, und es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{m=1}^{\infty} b_m$ oder anders geschrieben
$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}$.

Analog beweist man die **"Cauchy-Produkt-Formel"**:
Sind die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ absolut konvergent, so ist mit $c_k := \sum_{n+m=k} a_n b_m$ die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent, und es gilt:
$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$ oder anders geschrieben $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n+m=k} a_n b_m$.

Man hat also

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) + \dots .$$

D.h. man multipliziert alle Summanden der ersten Reihe mit allen Summanden der zweiten Reihe und addiert diese Produkte in einer natürlichen Reihenfolge.

Damit wird die bisher nur behauptete **Fundamentalgleichung der Exponentialfunktion** $\exp(z+w)=\exp(z)\cdot\exp(w)$ beweisbar:

Man erinnere sich: $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, wobei diese Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert, wie mit dem Majorantenkriterium per Vergleich mit der geometrischen Reihe nachgewiesen wurde.

Wir haben also

$$\exp(z+w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{n+m=k} \binom{k}{n} z^n w^m}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n+m=k} \frac{1}{n!\,m!} z^n w^m =$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}\right) = \exp(z)\exp(w)$$

Nach dem dritten Gleichheitszeichen gab es eine Indexumbenennung, anschließend wurde die Formel $\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}$ und dann die Cauchy-Produkt-Formel benutzt.

Beweis des "großen Umordnungssatzes":

Sei also $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und $b_n := a_{\sigma(n)}$.

Wir zeigen zunächst, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergiert, daß also $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$.

Dazu geben wir $\varepsilon > 0$ vor und müssen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, so daß $\forall n \geqslant n_0 : \sum_{k=n_0}^{n} |b_k| < \varepsilon$.

Voraussetzen dürfen wir, daß es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\forall n \geqslant m_0 : \sum_{k=m_0}^{n} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist jedenfalls $\sum_{k=m_0}^{\infty} |a_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

Wenn wir zu m_0 die Zahl n_0 so wählen können, daß $\forall n \geqslant n_0 : \sigma(n) \geqslant m_0$, dann sind wir fertig: denn dann ist $\forall n \geqslant n_0 \ \sum_{k=n_0}^{n} |b_k| = \sum_{k=n_0}^{n} |a_{\sigma(k)}| \leqslant \sum_{k=m_0}^{\infty} |a_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Die erste Ungleichung gilt, weil ja alle Indizes $\sigma(k)$ größer oder gleich m_0 sind und deshalb die zweite Summe dieselben und mehr Summanden wie die erste enthält.

Jetzt also zur Wahl von n_0 : Wir setzen einfach $n_0 := \max\ \sigma^{-1}(\{1, \ldots, m_0\}) + 1$. (Das Maximum existiert, da die Urbildmenge einer endlichen Menge unter einer bijektiven Abbildung endlich ist.) Ist dann $n \geqslant n_0$ so ist $n \notin \sigma^{-1}(\{1, \ldots, m_0\})$, also nicht $\sigma(n) \leqslant m_0$, also $\sigma(n) > m_0$ und damit erst recht $\sigma(n) \geqslant m_0$.