Mathematik II, Lineare Algebra und Analysis, SS 2012
M. Hortmann

Blatt 12

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Aufgaben

Namen							**Gruppe**	**Tutor**
1a	b	c	d	e	2a	b	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	6 Punkte=100%	

Aufgabe 1

Auf dem Intervall]-π/2, π/2[hat die Cosinusfunktion Werte größer als Null, also läßt sich auf diesem Intervall die Funktion tan x = sin x / cos x definieren und auch differenzieren:

a) Man berechne die Ableitung tan'(x) für $-\pi/2 < x < \pi/2$

b) Weil $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\ \rightarrow \ \mathbb{R}$ bijektiv ist, existiert die Umkehrabbildung $\mathbb{R} \ \rightarrow \ ]-\pi/2, \pi/2[$, die üblicherweise mit "arctan" bezeichnet wird[1].

Setzt man $f(x) = \tan \circ \arctan$, so ist offenbar $f(x) = x$. Man kann aber auch f'(x) mit der Kettenregel berechnen. Man leite daraus und unter Benutzung von a) eine Formel für arctan'(x) her. (In dieser soll Tangens nicht mehr auftauchen.)

c) Beweisen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus das folgende Additionstheorem für Tangens:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \quad \text{falls} \quad \tan x \tan y \neq 1$$

d) Sei x=arctan(1/5). Berechnen Sie mit Hilfe des obigen Additionstheorems tan(2x). Zeigen Sie dann, daß tan(4x)=120/119. Zeigen Sie dann, daß tan(4x- π/4)=1/239. Damit ergibt sich

4 arctan 1/5 - arctan 1/239= π/4.

1 In Pari "atan"

e) Aus der in b) berechneten Formel für arctan'(x) ergibt sich die folgende Potenzreihenentwicklung:

$$\arctan(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{für } |x|<1$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Reihe und der Formel aus d) die Zahl π, indem Sie die Reihenentwicklung jeweils nur bis n=3 durchführen.

Aufgabe 2

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung läßt sich so formulieren:

Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und setzt man für $a<x<b$ $F(x):=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, so ist $F:]a,b[\to\mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt $F'=f$.

Oder auch so:

Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $F:I\to\mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar[2] und es seien $a,b\in I$ mit $a<b$.

Dann ist $F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Man nutze die obige zweite Version des Hauptsatzes, um $\int_0^{2\pi}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ zu berechnen.

b) Man unterteile das Intervall [0,2π] in 512 gleichlange Teilintervalle, indem man $t_0=0$ und $t_{i+1}=t_i+2\pi/512$ setzt. Man berechne die Riemann-Summe $\sum_{i=0}^{511}\sin(t_i)(t_{i+1}-t_i)=\frac{2\pi}{512}\sum_{i=0}^{511}\sin(t_i)$ und vergleiche dies mit dem Ergebnis aus a).

Zur Vermeidung von Floatingpoint-Fehlern berechne man $\sum_{i=0}^{511}a_i$ rekursiv etwa so:

```
mysum(start,end)=local(mitte=(end+1-start)\2);\
if(mitte,return(mysum(start,start+mitte-1)+mysum(start+mitte,end)),\
return(a(start)))
```

2 d.h. die Ableitung f' sei auf I stetig