Mathematik II, Lineare Algebra und Analysis, SS 2012
M. Hortmann

Blatt 11

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Aufgaben

Namen					Gruppe	Tutor
1	2	3	4	5	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	4 Punkte=100%	

Aufgabe 1: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Man zeige: $a \leqslant b \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 : a \leqslant b + \varepsilon$.

Aufgabe 2: Sei $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ gegeben durch $x \mapsto 1/x$ und $x_0 > 0$. Zeigen Sie: f ist stetig in x_0.

Aufgabe 3
Die Kochsche Schneeflockenkurve ist ein Beispiel für eine stetige Kurve, die an keiner Stelle eine Tangente besitzt.

Sie läßt sich so konstruieren: Man betrachte die linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die gegeben sind durch die Matrizen $A_0 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_1 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $A_2 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Ist jetzt ein Vektor $y \in \mathbb{R}^2$ gegeben, so setze man $y_0 := A_0 y$, $y_1 = A_1 y$, $y_2 = A_2 y$, $y_3 = A_0 y$. Von einem Paar (x, y) gehe man über zu den Paaren $(x_0 = x, y_0)$, $(x_1 = x_0 + y_0, y_1)$, $(x_2 = x_1 + y_1, y_2)$, $(x_3 = x_2 + y_2, y_3)$.

Man setze jetzt $x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und beginnend mit der Liste $L_0 := [[x, y]]$ gehe man über zu $L_1 := [[x_0, y_0], [x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3]]$, usw. rekursiv von der Liste L_n, die aus 4^n Paaren besteht, zur Liste L_{n+1}, indem man jedes Paar $[x_{i_1 \ldots i_n}, y_{i_1 \ldots i_n}]$ durch die vier Paare $[x_{i_1 \ldots i_n 0}, y_{i_1 \ldots i_n 0}], [x_{i_1 \ldots i_n 1}, y_{i_1 \ldots i_n 1}], [x_{i_1 \ldots i_n 2}, y_{i_1 \ldots i_n 2}], [x_{i_1 \ldots i_n 3}, y_{i_1 \ldots i_n 3}]$ ersetzt.

Jedes einzelne Paar $[u,v]$ in einer Liste läßt sich jetzt graphisch umsetzen, indem man eine gerade Strecke vom Punkt u zum Punkt $u + v$ zeichnet bzw. zeichnen läßt.

Man zeichne diese Strecken mit Computerhilfe für jeweils alle Paare in L_n mit $n = 1, 2, 3, 8$.

Aufgabe 4
Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto x^3$. Zeigen Sie, daß f in $x_0 = 3$ differenzierbar ist und daß $f'(3) = 9$, indem Sie zeigen: $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x \neq 3}} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = 9$.

Aufgabe 5
Sei $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ gegeben durch $x \mapsto \sqrt{x}$. Setzen Sie voraus, daß f differenzierbar ist. Benutzen Sie, daß x=f(x)cdot f(x) und die Produktregel[1], um $f'(3)$ zu berechnen.

1 $(\varphi \cdot \psi)'(x_0) = \varphi'(x_0) \psi(x_0) + \varphi(x_0) \cdot \psi'(x_0)$