Mathematik II, Lineare Algebra und Analysis, SS 2012
M. Hortmann

Blatt 10

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Aufgaben

Namen								Gruppe	Tutor
1	2	3	4a	b	5a	b	c	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	1	5 Punkte=100%	

Aufgabe 1

Sind $a, b, c \in \mathbb{C}$, so gilt die Dreiecksungleichung $|a+b| \leq |a| + |b|$. Man folgere, daß ebenfalls gilt: $|a| - |b| \leq |a-b|$

Aufgabe 2

Sei (a_n) eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ und es gebe ein $b \in \mathbb{R}$, so daß $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_n \leq b$.
Man zeige, daß dann auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq b$.

Aufgabe 3

Es ist $\cos(2) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} = 1 - 4/2 + 16/24 + \sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}$, also

$\cos(2) - (-1/3) = \sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2(n+2)}}{(2(n+2))!}$. Man setze $a_n := (-1)^n \frac{2^{2(n+2)}}{(2(n+2))!}$.

Man zeige durch Induktion: $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ |a_n| \ \leq\ (1/10)^n$. [1]

---

1 Daraus folgt $|\cos(2) - (-1/3)| = \left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| \ \leq\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \ \leq\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 1/9$, woraus sich sofort $-1/3 - 1/9 \leq \cos(2) \leq -1/3 + 1/9$ und damit cos(2)<0 ergibt!

Aufgabe 4

a) Man betrachte auf der nicht-leeren Menge M die diskrete Metrik $d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \neq y \\ 0 & \text{für} \quad x = y \end{cases}$.

Man zeige: Ist $U \subset M$ eine beliebige Teilmenge, so ist U offen.

b) Die Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ besitze 1000 Elemente. Man zeige: K ist nicht offen.

Aufgabe 5

Man betrachte $\mathbb{R}^2$ mit der euklischen Metrik $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

a) Man zeige: Die Menge $]-1,1[\times]-1,1[= \{(x, y) | -1 < x < 1 \text{ und } -1 < y < 1\}$ ist offen.

b) Man zeige durch Überprüfung der Definition: Die Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ ist stetig.

c) Sei M ein metrischer Raum, und die Abbildungen $f, g : M \to \mathbb{R}$ seien stetig. Man zeige, daß dann auch die durch $x \mapsto (f(x), g(x))$ gegebene Abbildung $(f, g) : M \to \mathbb{R}^2$ stetig ist.