Mathematik II, Lineare Algebra und Analysis, SS 2012
M. Hortmann

Blatt 9

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Aufgaben

Namen					Gruppe	Tutor
1	2	3	4	5	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	4 Punkte=100%	

Aufgabe 1
Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{R}$. (D.h. die durch $s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$ gegebene Partialsummenfolge ist konvergent.) Man zeige: die Folge (a_n) ist eine Nullfolge, d.h $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Aufgabe 2
Die Folge (a_n) sei eine monoton fallende Nullfolge nicht-negativer reeller Zahlen, es gelte also $\forall n\in\mathbb{N}: 0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Sei weiterhin $s_n := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_i$, $t_n := s_{2n}$ und $r_n := s_{2n-1}$.

Man zeige:
Die Folge (t_n) ist monoton steigend, die Folge (r_n) ist monoton fallend und $\forall m, n\in\mathbb{N}: t_n \leqslant r_m$ und $\forall n\in\mathbb{N}:\ r_n - t_n = a_{2n}$.

Bemerkung:
Hieraus folgt offenbar, daß die Folge (s_n) , also die "alternierende Reihe" $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konvergiert.
U.a. wird die alternierende harmonische Reihe von obigem Kriterium erfaßt.

Aufgabe 3

In der Vorlesung wurde gezeigt, daß die "Potenzreihe" $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert. Man setzt $e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Offenbar gilt z.B. $\sum_{n=0}^{3} \frac{1}{n!} = \left(\left(\frac{1}{3}+1\right)\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{1}+1$ und allgemein ergibt sich mit der Rekursion $e_{m,0} := 1$, $e_{m,k+1} := \frac{e_{m,k}}{m-k}+1$, daß $e_{m,m} = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!}$.

Berechnen Sie mit Hilfe eines Pari-Programms $e_{20,20}$ und vergleichen Sie diesen Wert mit demjenigen, den Pari für exp(1) ausgibt. Der Witz an diesem Vorgehen ist, daß bei der Berechnung von $e_{m,m}$ nur m-mal multipliziert und m-mal 1 addiert wird.

Aufgabe 4

Es gibt noch eine weitere theoretisch interessante Darstellung der Zahl e, nämlich $e = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Man stelle sich vor, ein Kapital verzinse sich pro Jahr zu 100% . Dann hat man nach einem Jahr das doppelte. Nun ändere man das Verzinsungsverfahren: Statt pro Jahr 100% gebe es pro Monat 100/12%. Dann hat man nach einem Jahr das $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$ -fache. Nun ändere man wieder das Verzinsungsverfahren: Es gebe jeden Tag 100/365 % . Dann hat man nach einem Jahr das $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$ -fache. Usw, jede Stunde, jede Minute ... . Im Grenzwert hat man nach einem Jahr das e-fache. Daß der obige Grenzwert tatsächlich gleich e ist, zeigen wir später via Differentialrechnung.

In der Praxis konvergiert die durch $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ gegebene Folge (a_n) recht langsam. Im folgenden geht es darum, daß sie überhaupt konvergiert.

Man zeige: Die Folge (a_n) ist monoton steigend (indem man z.B. zeigt $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$)

Bemerkung:

Setzt man $b_n := a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$, so ist offenbar ist $a_n \leqslant b_n$. Wie in der Aufgabe zeigt man, daß die Folge (b_n) monoton fällt. Insgesamt ist dann die Folge (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt, also konvergent. Untersuchen Sie die obigen Folgen mit Pari.

Aufgabe 5

Hier nocheinmal die Grenzwertsätze für Folgen reeller Zahlen:
Für $x_n \to a$, $y_n \to b$ folgt $x_n + y_n \to a+b$, $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$.
Falls noch $a \neq 0$ und $\forall\, n \in \mathbb{N}: x_n \neq 0$, so gilt auch $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$ und $\frac{y_n}{x_n} \to \frac{b}{a}$.

Begründen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze, daß $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n+2}{n^2+n+7} = 3$.