Mathematik II, Lineare Algebra und Analysis, SS 2012
M. Hortmann

Blatt 8

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Aufgaben

<table>
<tr><th colspan="8">Namen</th><th>Gruppe</th><th>Tutor</th></tr>
<tr><td colspan="8"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td>1a</td><td>b</td><td>2a</td><td>b</td><td>3a</td><td>b</td><td>4a</td><td>b</td><td>Summe</td><td>bearbeitet</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>6 Punkte=100%</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Aufgabe 1

Sei K ein angeordneter Körper, d.h. ein Körper mit einer totalen Ordnung $\leq$ und den folgenden Verträglichkeitsbedingungen der arithmetischen Operationen mit der Ordnung:
$\forall x, y, z \in K: \ x \leqslant y \ \Rightarrow \ x+z \leqslant y+z$ und $\forall x, y \in K: \ x, y \geqslant 0 \ \Rightarrow \ xy \geqslant 0$.
a) Folgern Sie daraus $\forall x, y \in K: \ 0 < x \leqslant y \ \Rightarrow \ 0 < \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{y}$.
b) Definieren Sie rekursiv die Folge (x_n) in K durch $x_1 := 1$ und $x_{n+1} = x_n + 1$.
Beweisen Sie durch Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}: \ x_n \neq 0$.
(Beachten Sie dabei, daß die 1 hierbei in zwei verschiedenen Bedeutungen vorkommt: einmal als natürliche Zahl, einmal als das neutrale Element der Multiplikation in K. Die in der Aufgabenstellung vorkommende 0 ist das neutrale Element der Addition in K.)

Aufgabe 2

Es sei an die folgenden Begriffe erinnert:
Sei M eine geordnete Menge mit der Ordnungsrelation $\leq$ und $K \subset M$. Ein Element $s \in M$ heißt "obere Schranke von K", wenn $\forall x \in K: \ x \leqslant s$. Man setzt:
$\overline{S}(K) := \{x \in M \mid x \text{ ist obere Schranke von } K\}$. Gibt es ein Element $m \in K \cap \overline{S}(K)$, so ist es eindeutig bestimmt und man nennt es "Maximum von K" und schreibt m=max K.
Analog werden die Begriffe "untere Schranke" und "Minimum" definiert, sowie die Menge der unteren Schranken $\underline{S}(K)$. K heißt "nach oben beschränkt", wenn $\overline{S}(K) \neq \emptyset$, "nach unten beschränkt", wenn $\underline{S}(K) \neq \emptyset$. K heißt beschränkt, wenn es nach oben und nach unten beschränkt ist.
Existiert das Minimum von $\overline{S}(K)$, so nennt man es "Supremum von K", $\sup K := \min \overline{S}(K)$, analog ist das "Infimum von K" das Maximum von $\underline{S}(K)$, falls dieses Maximum existiert.

Wir betrachten den vollständigen, archimedisch angeordneten Körper $\mathbb{R}$: die Vollständigkeit ist gerade definiert durch: jede nach oben beschränkte Teilmenge besitzt ein Supremum!

a) Zeigen Sie: 1=sup]0,1[(Sooo trivial ist das auch nicht.)

b) Sei $K := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$. Weil $2 \in \overline{S}(K)$, ist $\overline{S}(K) \neq \emptyset$, d.h. $s := \sup K = \min \overline{S}(K)$ existiert.
In der Vorlesung wurde $s^2 < 2$ zum Widerspruch geführt, indem ein $t \in K$ konstruiert wurde mit $s < t$.

Zeigen Sie nun: Auch $s^2 > 2$ führt zum Widerspruch.
(Finden Sie dazu eine obere Schranke t von K, die kleiner als s ist.)

Aufgabe 3

Man definiere rekursiv folgende Folge reeller Zahlen: $x_1 := 2$, $x_{n+1} := \dfrac{x_n^2 + 2}{2\,x_n}$.

Offenbar ist jedes Folgenglied sogar rational!

Zeigen Sie:
a) durch Induktion: $\forall\, n \in \mathbb{N} : x_n^2 > 2$ und $\forall\, n \in \mathbb{N} : 1 < x_n$.
b) die Folge (x_n) ist monoton fallend, d.h. $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ x_{n+1} \leqslant x_n$.
Damit besitzt die Folge (x_n) einen Grenzwert s.

c) Freiwillige Sonderaufgabe:
Man setze für $x \neq 0$ $y := f(x) := \dfrac{x^2+2}{2x}$ und zeige: Ist $x>0$ und $x^2 > 2$, so ist $0 < y - \sqrt{2} < \frac{1}{4}(x - \sqrt{2})$

Wegen $1 < \sqrt{2} < 2$ folgt daraus $0 < (x_2 - \sqrt{2}) < \frac{1}{4}(x_1 - \sqrt{2}) < \frac{1}{4}$ und daraus
$(x_3 - \sqrt{2}) < \frac{1}{4}(x_2 - \sqrt{2}) < \frac{1}{16}(x_1 - \sqrt{2}) < \frac{1}{16}$, etc. und damit rekursiv: $x_n - \sqrt{2} < \dfrac{1}{4^{n-1}}$. Daher ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$. Dies wird man bald mit Hilfe der sog. Grenzwertsätze viel einfacher sehen.

Aufgabe 4:

Sei (M,d) ein metrischer Raum.

a) Man definiere für $x, y \in M$ $\quad d_1(x,y) := \begin{cases} d(x,y), & \text{falls } d(x,y) < 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$
und zeige, daß auch d_1 eine Metrik auf M ist.

b) Man definiere für $x, y \in M$ $\quad d_2(x,y) := \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$
und zeige, daß auch d_2 eine Metrik auf M ist.