Mathematik II, Lineare Algebra und Analysis, SS 2012
M. Hortmann

Blatt 7

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Aufgaben

Namen											Gruppe	Tutor
1a	b	c	dα	dβ	2a	b	c	3a	b	c	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6 Punkte=100%	

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die 2x2-Rotationsmatrix, die einer Linksdrehung um den Nullpunkt im $\mathbb{R}^2$ um 30 Grad entspricht.

b) Berechnen Sie die 3x3 Rotationsmatrix, die einer Linksdrehung um die z-Achse im $\mathbb{R}^3$ um 30 Grad entspricht.

c) Berechnen Sie die 3x3 Rotationsmatrix, die entsteht, wenn man zunächst 30 Grad nach links um die z-Achse dreht, anschließend 30 Grad nach links um die y-Achse und schließlich noch 30 Grad nach links um die x-Achse.

d) die in c) entstandene Matrix A entspricht selbst einer Drehung um eine Achse: es gibt einen von Null verschiedenen Vektor, der durch A auf sich selbst abgebildet wird, das heißt es gibt einen Eigenvektor von A zum Eigenwert 1:

α) Man berechne das charakteristische Polynom von A und zeige, daß es 1 als Nullstelle besitzt.

β) Man berechne einen zugehörigen Eigenvektor, d.h. einen Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ für den $(A-1\cdot E)x=0$.

Bemerkung zum Rechnen mit Pari: Wenn man für die obige Aufgabe Pari als Hilfsmittel einsetzt, um z.B. sicher zu sein, daß man die Matrizenprodukte oder das charakteristische Polynom richtig berechnet, so benötigt man einen geeigneten Ausdruck für $\sqrt{3}$. Würde man man hierzu naiv `sqrt(3)` nehmen, so hätte man das Problem, daß Pari dafür nur eine rationale Näherung einsetzt. Will man dagegen algebraisch exakt rechnen, so benutze man für $\sqrt{3}$ einfach den Ausdruck `w=Mod(x,x^2-3)`. Denn dann ist offenbar $w^2-3=0$!

Aufgabe 2

Sei $K=\mathbb{Z}_2$. Man betrachte den projektiven Raum $\mathbb{P}^2(K)$. Jeder "Punkt" dieses Raums ist definitionsgemäß ein eindimensionaler Unterraum von $\mathbb{Z}_2^3$ und jede "Gerade" in diesem Raum ist definitionsgemäß ein zweidimensionaler Unterraum von $\mathbb{Z}_2^3$. Es gibt daher sieben Punkte und sieben Geraden in $\mathbb{P}^2(K)$. Auf jeder Geraden liegen drei Punkte und jeder Punkt liegt auf drei Geraden. Zu zwei Geraden gibt es genau einen Punkt, der auf beiden Geraden liegt, und zwei Punkte liegen auf genau einer Geraden.

Dabei hat "liegen auf" die folgende Bedeutung: Ein "Punkt" liegt auf einer "Geraden", wenn der den "Punkt" definierende 1-dimensionale Unterraum Teilmenge des die "Gerade" definierenden 2-dimensionalen Unterraums ist.

a) Schreiben sie alle "Punkte" und "Geraden" in $\mathbb{P}^2(\mathbb{Z}_2)$ als Teilmengen von $\mathbb{Z}_2^3$ hin.

b) Geben sie jedem Punkt und jeder Geraden eine Nummer. Geben Sie zu jeder Geraden die Nummern der Punkte an, die auf ihr liegen. Geben Sie zu jedem Punkt die Nummern der Geraden an, auf denen er liegt.

c) Geben Sie die 7x7 Matrix an, bei der an der Stelle (i,j) die Nummer der Geraden steht, auf der die Punkte mit den Nummern i und j liegen. Geben Sie auch die 7x7 Matrix an, bei der an der Stelle (i,j) die Nummer des Punktes steht, der auf den Geraden mit den Nummern i und j liegt.

Bemerkung 1: Am schönsten wäre es, wenn die Nummerierung in b) so wäre, daß für jedes i die Liste der Nummern der Geraden, auf denen der Punkt i liegt, gleich der Liste der Nummern der Punkte ist, die auf der Geraden i liegen. In diesem Fall sind die beiden Matrizen in c) identisch.

Bemerkung 2: Wenn man statt von $K=\mathbb{Z}_2$ von $K=\mathbb{Z}_3$ ausgegangen wäre, so würde der projektive Raum $\mathbb{P}^2(K)$ 13 Punkte und 13 Geraden enthalten. Entsprechendes erhielte man für $K=\mathbb{Z}_{p.}$.

Insgesamt geht es in diesen Beispielen um "endliche projektive Ebenen". Die $\mathbb{P}^3(K)$ sind dann Räume, in denen es neben Punkten und Geraden auch Ebenen gibt, und in denen Aussagen gelten wie "zwei Ebenen schneiden sich immer in genau einer Geraden", oder zu einem Punkt und einer Geraden, die diesen Punkt nicht enthält, gibt es genau eine Ebene, in der dieser Punkt und diese Gerade liegen, etc. In diesen Geometrien gibt es keine parallelen Geraden oder Ebenen.

Aufgabe 3

a) Man überlege sich, daß durch $[z:w]\mapsto \frac{1}{|z|^2+|w|^2}\begin{pmatrix} 2\operatorname{Re} z\bar{w} \\ 2\operatorname{Im} z\bar{w} \\ |z|^2-|w|^2 \end{pmatrix}$ eine Abbildung $f:\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\to S^2$ gegeben ist[1] und betrachte zusätzlich die durch $w\mapsto[z:1]$ gegebene Abbildung $g:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Man berechne die Abbildung $f\circ g:\mathbb{C}\to S^2$, d.h. man berechne für $z\in\mathbb{C}$ den Wert $(f\circ g)(z)$.

b) Man betrachte die Einheitssphäre $S^2\subset\mathbb{R}^3$ und berechne die Abbildung $h:\mathbb{C}\to S^2$, die geometrisch so gegeben ist: Man verbinde den Punkt $z=x+iy$ in der xy-Ebene durch eine Gerade mit dem Nordpol (0,0,1) der Sphäre S^2 und definiere $h(z)$ als den zweiten Schnittpunkt dieser Geraden mit der Sphäre. Aufgabe ist es $h(z)$ in Abhängigkeit von z bzw. x,y konkret auszurechnen.

---

1 f ist sogar bijektiv, aber dies braucht hier nicht gezeigt zu werden..

c) Offenbar kommt in der Konstruktion in b) jeder Punkt der Sphäre außer dem Nordpol als Bild von h vor, und offenbar ist die Abbildung h auch injektiv. Es gibt also die Umkehrabbildung $\varphi: S^2 \setminus \{\text{Nordpol}\} \to \mathbb{C}$, wobei $\varphi(u,v,w)$ gerade der eindeutig bestimmte Punkt $z=x+iy=(x,y)$ der x,y-Ebene ist, der von der Geraden durch den Nordpol und den Punkt $(u,v,w) \in S^2$ getroffen wird.

Finden Sie dementsprechend eine Formel für $\varphi(u,v,w)$.