Mathematik II, Lineare Algebra und Analysis, SS 2012
M. Hortmann

Blatt 6

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Aufgaben

<table>
<tr><th colspan="6">Namen</th><th>Gruppe</th><th>Tutor</th></tr>
<tr><td colspan="6"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td>1a</td><td>b</td><td>2</td><td>3</td><td>4a</td><td>b</td><td>Summe</td><td>bearbeitet</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>4 Punkte=100%</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Aufgabe 1

Sei $A := \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 10 & 1 & 0 \\ 9 & 7 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$.

1. Die Addition oder Subtraktion eines Vielfachen einer Zeile bzw. Spalte einer Matrix zu einer anderen Zeile bzw. Spalte ändert den Wert der Determinante nicht.

2. Eine Spalten- oder Zeilenvertauschung ändert das Vorzeichen der Determinante.

3. Die Determinante einer "Matrix in oberer Dreiecksgestalt", d.h. einer Matrix, deren Koeffizienten unterhalb der Hauptdiagonale sämtlich 0 sind, ist gleich dem Produkt ihrer Hauptdiagonalelemente.

4. Durch die Operationen in 1. und 2. läßt sich jede quadratische Matrix auf obere Dreiecksgestalt bringen.

a) Man benutze obige Facts, um die Determinante der Matrix zu berechnen. Dokumentieren Sie alle Rechenschritte!

b) Man berechne $\det A$ als die Summe $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \varepsilon_\sigma a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} a_{\sigma(4)4}$.

Schreiben Sie zunächst alle Summanden und die Produkte und das Vorzeichen explizit hin.

Aufgabe 2

Ist $A \in M_{n\times n}(K)$, so entstehe die Matrix $A_{ij} \in M_{(n-1)\times(n-1)}(K)$ aus *A* durch Streichen der *i*-ten Zeile und *j*-ten Spalte . Setzt man $b_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ji}$ und $B := (b_{ij})$, so gilt:

$$A \cdot B = B \cdot A = (\det A) E$$

Berechnet man z.B. den Koeffizienten in der ersten Zeile und der ersten Spalte der Matrix $B \cdot A$, so ist dieser gleich der Determinante von *A*. Führen Sie diese Rechnung explizit und detailliert am Beispiel der Matrix *A* aus Aufg. 1 durch, indem Sie die erste Zeile der Matrix *B* mit der ersten Spalte der Matrix *A* multiplizieren[1].

Aufgabe 3

Finden Sie zwei von Null verschiedene Vektoren in $\mathbb{R}^3$ mit ganzzahligen Komponenten, die senkrecht aufeinander und senkrecht auf dem Vektor $(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ stehen. Beschreiben Sie detailliert Ihr Vorgehen.

Aufgabe 4

a) Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ sei $\varphi(x, y) := 2x_1 y_1 + 3(x_1 y_2 + x_2 y_1) + 5x_2 y_2$. Offenbar ist φ bilinear und symmetrisch . Rechnen Sie direkt nach, daß φ positiv definit, also ein Skalarprodukt ist.

b) Finden Sie zu diesem Skalarprodukt zwei linear unabhängige Vektoren für die gilt: $\varphi(x, y) = 0$ [2].

---

1 Dies nennt man auch "Entwicklung der Determinante nach der ersten Spalte".

2 Da es sich nicht um das kanonische Skalarprodukt handelt, ist $\varphi(x, y) = 0$ nicht dasselbe wie "senkrecht aufeinander stehen" in der üblichen geometrischen Bedeutung.