Mathematik II, Lineare Algebra und Analysis, SS 2012
M. Hortmann

Blatt 5

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Aufgaben

<table>
<tr><th colspan="8">Namen</th><th>Gruppe</th><th>Tutor</th></tr>
<tr><td colspan="8"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3a</td><td>b</td><td>4a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>Summe</td><td>bearbeitet</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>6 Punkte=100%</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Aufgabe 1

Sei $A := \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 10 & 1 & 0 \\ 9 & 7 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Z}_{11})$

Berechnen Sie A^{-1} und dokumentieren Sie alle Rechenschritte.

Aufgabe 2

Gegeben seien die Menge $S := \{(1,2,3,4), (1,3,4,5), (3,4,5,6)\} \subset \mathbb{Z}_7^4$. [1] Betrachten Sie den Unterraum $U \subset \mathbb{Z}_7^4$, der aus allen Linearkombinationen der Elemente von S besteht, also $U = \langle S \rangle$.
Benutzen Sie den Gaußschen Algorithmus, um Skalare $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}_7$ zu finden, so daß
$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_7^4 \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0\}$.

Aufgabe 3

Ist $A \in M_{n\times n}(K)$ eine quadratische Matrix, so definiert man die "Spur von A" durch
$\text{Spur } A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
a) Man rechne nach, daß für $A, B \in M_{n\times n}(K)$ gilt: $\text{Spur } AB = \text{Spur } BA$
b) Sind $A, X \in M_{n\times n}(K)$ und ist X invertierbar, so gilt $\text{Spur } X^{-1} A X = \text{Spur } A$.

1 Zeilenvektoren stehen hier und im Folgenden nur um Platz zu sparen.

Aufgabe 4

Man betrachte den dreidimensionalen Vektorraum $V := K^3$ über dem Körper K mit den kanonischen Basisvektoren e_1, e_2, e_3. Es gibt ein Produkt auf K^3, d.h. eine Verknüpfung $K^3 \times K^3 \to K^3$, $(a, b) \mapsto a \times b$ mit den Eigenschaften:

$e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$, $e_3 \times e_1 = e_2$

$\forall \lambda \in K, a, b, c \in V$:

$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$, $(b+c) \times a = b \times a + c \times a$, $a \times (\lambda b) = (\lambda a) \times b = \lambda (a \times b)$ und $a \times a = 0$.

Mit diesen Regeln ist das Produkt bereits eindeutig bestimmt (siehe b)).
Benutzen Sie die Regeln, um zu zeigen:

a) Zeigen Sie: $\forall a, b \in V : a \times b = -b \times a$

b) Berechnen Sie das Produkt $(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3)$, d.h. berechnen Sie seine 3 Komponenten.

c) Zeigen Sie: $a, b \in V$ sind linear abhängig genau dann wenn $a \times b = 0$.

d) Ist $y = (y_1, y_2, y_3) \in V$ gegeben, so ist die durch $x \mapsto x \times y$ gebene Abbildung $V \to V$ linear.
Berechnen Sie die zugehörige Matrix bezüglich der kanonischen Basis von *V*.