

Blatt 4

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Aufgaben

Namen						Gruppe	Tutor
1a	b	2	3a	b	c	Summe	bearbeitet
1	1	1	1	1	1	5 Punkte=100%	

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurde versucht, die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{Z}_7)$ zu invertieren.

Dies kann natürlich nur dann funktionieren, wenn die drei Spaltenvektoren in \mathbb{Z}_7^3 linear unabhängig sind.

a) Prüfen Sie, ob dies der Fall ist.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p , daß m zufällig gewählte Vektoren von \mathbb{Z}_p^n linear unabhängig sind. Machen Sie dazu den folgenden Ansatz:

$$p_k := \frac{\text{Anzahl der Vektoren außerhalb eines } k-1\text{-dimensionalen Unterraums von } \mathbb{Z}_p^n}{\text{Anzahl der Vektoren in } \mathbb{Z}_p^n} \text{ und}$$

$$p = \prod_{i=1}^m p_i.$$

Welches also ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei der zufälligen Wahl der obigen Matrix A sich diese als nicht-invertierbar herausstellt?

Aufgabe 2

A sei eine Matrix mit 5 Zeilen und 7 Spalten mit Koeffizienten im Körper K .

Geben Sie die quadratische Matrix an, mit der Sie A von links multiplizieren müssen, damit das Ergebnis diejenige Matrix ist, die aus A entsteht, wenn man das λ -fache der 4. Zeile von A zur 2. Zeile von A addiert.

Geben Sie die quadratische Matrix an, mit der Sie A von rechts multiplizieren müssen, damit das Ergebnis diejenige Matrix ist, die aus A entsteht, wenn man das λ -fache der 4. Spalte von A zur 2. Spalte von A addiert.

Aufgabe 3

a) Man bringe die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 5}(\mathbb{Z}_5)$ durch elementare Zeilenumformungen auf Gaußsche Normalform $\begin{pmatrix} E & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Lesen Sie aus der Gaußschen Normalform eine Basis des Kerns von A ab.

c) Gibt es eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Ax=b$ mit $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^4$?

Falls ja, geben Sie eine an.