Mathematik II, Lineare Algebra und Analysis, SS 2012
M. Hortmann

Blatt 3

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Aufgaben

Namen	**Gruppe**	**Tutor**

1a	b	2	3a	b	4ab	4cd	5	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	1	6 Punkte=100%	

Aufgabe 1

Sei V ein K-Vektorraum, $U \subset V$ ein Unterraum.
a) Man zeige, daß duch $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in U$ eine Äquivalenzrelation auf V gegeben ist.
b) Seien $x, y, z, w \in V, \lambda \in K$, wobei $x \sim z$ und $y \sim w$. Man zeige, daß dann $x + y \sim z + w$ und $\lambda x \sim \lambda z$.

Aufgabe 2

Seien V,W K-Vektorräume, $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V, und $f, g : V \to W$ seien linear.
Man zeige: Gilt $f(v_1) = g(v_1), \ldots, f(v_n) = g(v_n)$, so folgt $f=g$.

Aufgabe 3

Seien V,W K-Vektorräume, $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in V, $f : V \to W$ sei linear. Man zeige
a) Ist f injektiv und sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig in V, so sind die Bilder $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig in W.
b) Ist f surjektiv und sind $v_1, \ldots, v_n$ Erzeugendensystem von V, so sind die Bilder $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ ein Erzeugendenystem von W.

Aufgabe 4

Sei $K=\mathbb{Z}_7$ und $V:=K^2$. Die Vektoren $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ bilden die "kanonische Basis" dieses Vektorraums. Man überzeugt sich leicht, daß auch die Vektoren $v_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ und $v_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ eine Basis von V bilden.

Man betrachte nun die identische Abbildung $\mathrm{id}:V\rightarrow V$.
Diese ist trivialerweise linear und natürlich bijektiv, also ein Isomorphismus.
Bei dieser Abbildung stimmen Urbildraum und Bildraum überein. Eine solche lineare Abbildung, also eine, die einen Vektorraum in sich selbst abbildet, nennt man einen "(Vektorraum-)Endomorphismus".

In der Vorlesung wurde gezeigt, wie man zu einer linearen Abbildung zwischen zwei endlichdimensionalen Vektorräumen und zu auf beiden Vektorräumen gewählten Basen die zugehörige Matrix berechnet.

Man konstruiere diese Matrix für die obige Abbildung $\mathrm{id}:V\rightarrow V$, bei jeweils folgender Basiswahl:

a) im Urbildraum und im Bildraum die kanonische Basis.
b) im Urbildraum die kanonische Basis und im Bildraum die Basis v_1, v_2 .
c) im Urbildraum die Basis v_1, v_2 und im Bildraum die kanonische Basis.
d) im Urbildraum und im Bildraum die Basis v_1, v_2 .

Aufgabe 5
Man betrachte das Polynom $f=X^3+X+1$ im Polynomring $\mathbb{Z}_2[X]$.
$V:=\mathbb{Z}_2[X]$ ist in natürlicher Weise ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}_2$: dabei ist die Vektoraddition die normale Polynomaddition, und da es nur die Skalare 0 und 1 gibt, ist klar, wie die Multipli kation eines Polynoms mit einem Skalar auszusehen hat. Die Polynome vom Grad kleiner als 3 bilden einen dreidimensionalen Unterraum $U\subset V$ mit der Basis $1, X, X^2$. Man definiere nun die Abbildung $\Phi:U\rightarrow U$ durch $g\mapsto(g\cdot g)\% f$, d.h. man multipliziere ein Polynom erst mit sich selbst, dividiere dann das Ergebnis dieser Quadrieroperation durch f und nehme den Rest.

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß Φ ein Vektorraumisomorphismus ist[1].
(Man könnte es sogar "zu Fuß" zeigen, weil ja U nur 8 Elemente besitzt.)

Man setze im Folgenden voraus, daß Φ linear ist und berechne die zu Φ gehörige Matrix bezüglich der oben genannten Basis auf U.

1 Es ist eigentlich unüblich, daß eine Quadrieroperation zu einer linearen Abbildung führt. Dahinter steckt, daß in einem Körper, in dem die Gleichung 1+1=0 gilt, z.b. in $\mathbb{Z}_2$, die binomische Formel die hübsche Gestalt $(x+y)^2=x^2+y^2$ besitzt.