Mathematik II, Lineare Algebra und Analysis, SS 2012
M. Hortmann

Blatt 2

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Aufgaben

<table>
<tr><th colspan="8">Namen</th><th>Gruppe</th><th>Tutor</th></tr>
<tr><td colspan="8"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td>1a</td><td>b</td><td>2a</td><td>b</td><td>c</td><td>3a</td><td>3bα</td><td>3bβ</td><td>Summe</td><td>bearbeitet</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>6 Punkte=100%</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Aufgabe 1

Im Folgenden sei V ein K-Vektorraum, wobei in K die Ungleichung $1+1\neq 0$ gelte.
a) Seien $x, y\in V$ linear unbhängig und $v, w\in V$ gegeben durch $v:=x+y$, $w:=x-y$. Man zeige: Auch v, w sind linear unabhängig.

b) Seien $x, y\in V$ ein Erzeugendensystem von V und $v, w\in V$ gegeben durch $v:=x+y$, $w:=x-y$. Man zeige: Auch v, w bilden ein Erzeugendensystem von V.

Aufgabe 2

Sei $f:\mathbb{Z}_7^3\to\mathbb{Z}_7$ gegeben durch $f(x, y, z)=2x+3y+4z$.
a) Rechnen Sie explizit nach, daß f linear, also ein $\mathbb{Z}_7$-Vektorraumhomomorphismus ist.

b) Finden Sie zwei linear unabhängige Vektoren im Kern dieser Abbildung. (D.h. beschreiben Sie, wie Sie die Vektoren finden und beweisen Sie ihre lineare Unabhängigkeit.)

c) Sei $S:=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{Z}_7^3$. Finden Sie einen Vektor von $\mathbb{Z}_7^3$, der nicht im von S erzeugten Unterraum $<S>$ liegt. (D.h. beschreiben Sie, wie Sie den Vektor finden und beweisen Sie, daß er nicht Element von $<S>$ ist.)

Aufgabe 3

Sei im Folgenden wieder V ein K-Vektorraum.

In der Vorlesung wurde behauptet:
Ist $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis von V, so besitzt jede Basis von V n Elemente.
Ist $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis von V, so ist keine Menge von weniger als n Elementen ein Erzeugendensystem von V.
Ist $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis von V, so ist keine Menge von mehr als n Elementen linear unabhängig.

Die folgenden Teile dieser Aufgabe sollen gerade zu einer Beweisidee für die obigen Behauptungen führen. Sie sollen die obigen Behauptungen also nicht benutzen, sondern ausschließlich die Definitionen von Linearer Unabhängigkeit und Erzeugendensystem.

a) V besitze eine Basis, die nur aus einem einzigen Element $x \in V$ besteht.
Man zeige: Sind y, z zwei beliebige Elemente von V, so sind sie nicht linear unabhängig.

b) Sei V ein K-Vektorraum. V besitze eine Basis, die aus zwei verschiedenen Elementen $x, y \in V$ besteht.

α) Man zeige: Ein Erzeugendensystem von V kann nicht nur aus einem Element bestehen.

β) Man zeige: Drei Vektoren $u, v, w \in V$ können nicht linear unabhängig sein.