Mathematik II, Lineare Algebra und Analysis, SS 2012
M. Hortmann

Blatt 1

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Aufgaben

Namen							Gruppe	Tutor
1a	b	2a	b	3	4a	b	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	6 Punkte=100%	

Sei K ein Körper.
Ein K-Vektorraum ist eine abelsche Gruppe $(V,+)$, zusammen mit einer Operation
$\begin{array}{ccc} K\times V & \to & V \\ (\lambda,v) & \mapsto & \lambda v \end{array}$, so daß gilt:

$\forall\, v\in V: 1v=v$
$\forall\, \lambda,\mu\in K, v\in V: \lambda(\mu v)=(\lambda\mu)v$
$\forall\, \lambda,\mu\in K, v\in V: (\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v$
$\forall\, \lambda\in K, v,w\in V: \lambda(v+w)=\lambda v+\lambda w$

Aufgabe 1 Gegeben sei ein K-Vektorraum V. Zeigen Sie:

a) $\forall\, v\in V: 0v=0$ [1]
b) $\forall\, \lambda\in K, v\in V: (-\lambda)v=-(\lambda v)$ [2]

Aufgabe 2
Sei $U:=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{Z}_2^4 \mid x+y+z+w=0\right\}$ [3]. U ist ein Unterraum von $\mathbb{Z}_2^4$.

a) Schreiben Sie alle 8 Elemente von U hin.
b) Zeigen Sie, daß jedes Element von U sich als Linearkombination der Vektoren (1,1,0,0), (1,0,0,1) und (0,1,1,0) schreiben läßt.

1 Auf der linken Seite der Gleichung ist 0 das neutrale Element der Addition in K, auf der rechten Seite ist 0 das neutrale Element der Vektoraddition in V, also der Nullvektor
2 Auf der linken Seite bedeutet das Minuszeichen die Inversenbildung bzgl. der Addition in K, auf der rechten Seite die Inversenbildung bezüglich der Vektoraddition in V.
3 Um Platz zu sparen, schreibe ich hier Zeilenvektoren.

Aufgabe 3
Schreiben Sie alle 16 Unterräume des $\mathbb{Z}_2$-Vektorraums $\mathbb{Z}_2^3$ hin, indem Sie jeweils die Elemente auflisten.

Aufgabe 4

Seien V, W K-Vektorräume und $f: V \to W$ ein Vektorraumhomomorphismus.
Dies bedeutet: $\forall\, v, w \in V : f(v+w) = f(v) + f(w)$ und $\forall\, \lambda \in K, v \in V : f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Weiterhin sei $S \subset V$ ein Unterraum, dies ist gleichbedeutend mit $\forall\, u, v \in S : u + v \in S$ und $\forall\, \lambda \in K, u \in S : \lambda u \in S$.
Außerdem sei $T \subset W$ ein Unterraum.

Man zeige:
a) $f(S) = \{ f(v) \mid v \in S \}$ ist Unterraum von W.
b) $f^{-1}(T) = \{ v \in V \mid f(v) \in T \}$ ist Unterraum von V.

In Worten: Die Bildmenge eines Unterraums unter einem Vektorraumhomomorphismus ist ein Unterraum und die Urbildmenge eines Unterraums unter einem Vektorraumhomomorphismus ist ein Unterraum.