Zur Vollständigkeit der reellen Zahlen

$\mathbb{R}$ ist gegeben als vollständiger angeordneter Körper.
Vollständigkeit wurde so definiert: Jede nach oben beschränkte Teilmenge besitzt ein Supremum.

Exkurs über beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$
Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn es eine Zahl $A \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $\forall\, x \in M: \; x \leqslant A$, m.a.W: es gibt eine Zahl, welche oberhalb aller Elemente von *M* liegt.
Eine solche Zahl nennt man eine obere *Schranke von* M. Man bezeichnet die Menge der oberen Schranken von M durch $\overline{S}(M)$. *M* ist also genau dann nach oben beschränkt, wenn $\overline{S}(M) \neq \emptyset$.

Existiert das Minimum von $\overline{S}(M)$, so nennt man es Supremum von *M* und schreibt es "sup *M*".
Es ist also $\sup M := \min \overline{S}(M)$.

Entsprechend definiert man die Menge der unteren Schranken $\underline{S}(M)$ und nennt *M nach unten beschränkt* wenn $\underline{S}(M) \neq \emptyset$; man nennt *M beschränkt*, wenn *M* nach oben und nach unten beschränkt ist.

Existiert das Maximum von $\underline{S}(M)$, so nennt man es das Infimum von *M* und schreibt es "inf *M*".
Es ist also $\inf M := \max \underline{S}(M)$. Ist *M* nach unten beschränkt, so ist $\underline{S}(M)$ offenbar nach oben beschränkt - jedes Element von *M* ist ja obere Schranke von $\underline{S}(M)$. Daher besitzt $\underline{S}(M)$ ein Supremum, und man überlegt leicht, daß $\sup \underline{S}(M)$ selbst eine untere Schranke von *M* und damit die größte untere Schranke, also das Infimum von *M* ist. Man muß die Existenz des Infimums einer nach unten beschränkten Menge reeller Zahlen also nicht extra fordern.

Über die Vollständigkeitseigenschaft von $\mathbb{R}$ haben wir bewiesen, daß es in $\mathbb{R}$ eine Quadratwurzel aus 2 gibt: Dazu bildeten wir die Menge $M := \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 2 \}$, zeigten, daß sie nach oben beschränkt ist und daß für s:=sup *M* die Gleichung $s^2 = 2$ gilt.

Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ folgt die Archimedizität:
Wäre $\mathbb{R}$ nicht archimedisch, so gäbe es eine Zahl $A \in \mathbb{R}$, so daß $\forall\, n \in \mathbb{N} : n \leqslant A$. Dabei fassen wir die natürlichen Zahlen als diejenige Teilmenge der reellen Zahlen auf, die durch vielfache Addition der Eins, also des 1-Elements der Multiplikation, zu sich selbst entsteht. Wie man sieht, bedeutet die angenommene Nicht-Archimedizität von $\mathbb{R}$ gerade, daß die Teilmenge $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist. Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ würde dann folgen, daß $s := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ existiert. *s* wäre also die kleinste obere Schranke von $\mathbb{N}$. Wegen s-1 < s wäre s-1 keine obere Schranke mehr, das heißt, nicht alle natürlichen Zahlen lägen unterhalb von s-1. Es gäbe dann also eine natürliche Zahl, die größer als s-1 ist, sagen wir $\mathbb{N} \ni n > s - 1$. Dann wäre $n + 1 > (s - 1) + 1 = s$, und damit hätten wir eine natürliche Zahl gefunden, die größer ist als *s*. Damit wäre aber *s* keine obere Schranke für die Menge der natürlichen Zahlen, und dies ist ein Widerspruch zur Konstruktion von *s*. Also ist die Annahme falsch, daß $\mathbb{R}$ nicht archimedisch ist.

Wir wollen demonstrieren, daß aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ auch folgt, daß Cauchyfolgen konvergieren.

Dazu zeigen wir zunächst den wichtigen **Hilfssatz**:
Jede mononton steigende nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert.

Dabei heißt eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ monoton steigend, wenn gilt $\forall\, n, m \in \mathbb{N} : n \leqslant m \;\Rightarrow\; x_n \leqslant x_m$.
Sie heißt *beschränkt*, wenn $\exists A \in \mathbb{R} : \forall\, n \in \mathbb{N} : |x_n| \leqslant A$. Gilt $\exists A \in \mathbb{R} : \forall\, n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant A$, so heißt sie

nach oben beschränkt, bzw. *nach unten beschränkt* wenn $\exists A\in\mathbb{R}:\forall n\in\mathbb{N}:x_n\geqslant A$.
Eine Folge ist offenbar genau dann beschränkt, wenn sie sowohl nach oben wie nach unten beschränkt ist.

Die Beschränktheit der Folge (x_n) nach oben bedeutet offenbar, daß auch die Menge $M:=\{x_n|n\in\mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist. Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ folgt dann, daß $s:=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n:=\sup M$ existiert. Von diesem Supremum wollen wir zeigen, daß $s=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, d.h. die Folge konvergiert und hat den Grenzwert *s*.

Offenbar gilt $\forall n\in\mathbb{N}:x_n\leqslant s$.
Sei nun $\varepsilon>0$ vorgegeben.
Da $s-\varepsilon<s$, ist $s-\varepsilon$ keine obere Schranke mehr für *M*. Es gibt also ein $n_0\in\mathbb{N}$ mit $x_{n_0}>s-\varepsilon$. Weil die Folge monoton steigt, folgt $\forall n\geqslant n_0:s-\varepsilon<x_{n_0}\leqslant x_n$ und insgesamt $\forall n\geqslant n_0:s-\varepsilon<x_n\leqslant s<s+\varepsilon$.
Es ergibt sich $\forall n\geqslant n_0:-\varepsilon<x_n-s<\varepsilon$, also $\forall n\geqslant n_0:|x_n-s|<\varepsilon$. Wir haben somit gezeigt, daß *s* Grenzwert der Folge ist.

Jetzt führen wir den Fall einer beliebigen Cauchyfolge auf eine monoton steigende beschränkte Folge zurück.

Zunächst zeigen wir den **Hilfssatz**: Jede Cauchyfolge (x_n) reeller Zahlen ist beschränkt.

Cauchyfolge bedeutet: $\forall\varepsilon>0\,\exists n_0\in\mathbb{N}\,\forall n,m\geqslant n_0:|x_n-x_m|<\varepsilon$.
Wählen wir speziell $\varepsilon=1$, so gibt es ein $n_0\in\mathbb{N}$ mit $\forall n,m\geqslant n_0$: $|x_n-x_m|<1$, insbesondere also $\forall n\geqslant n_0:|x_n-x_{n_0}|<1$, also $\forall n\geqslant n_0$: $|x_n|=|x_{n_0}+(x_n-x_{n_0})|\leqslant|x_{n_0}|+|x_n-x_{n_0}|<|x_{n_0}|+1$ und daher $\forall n\in\mathbb{N}$: $|x_n|\leqslant\max\left\{\ \max\left\{x_n\,\middle|\,1\leqslant n\leqslant n_0\right\}\ ,\ |x_{n_0}|+1\right\}$, d.h. die Folge ist beschränkt.

Wir setzen jetzt $y_n:=\inf\limits_{n\leqslant k} x_k:=\inf\left\{x_k\,\middle|\,n\leqslant k\right\}$. Diese Infima existieren, da die Folge (x_n) beschränkt ist. Man sieht auch, daß die so definierte Folge (y_n) monoton steigt. Es gilt auch $\forall n\in\mathbb{N}$: $y_n=\inf\limits_{n\leqslant k} x_k\leqslant\sup\limits_{n\leqslant k} x_k\leqslant\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, und die auftauchenden Suprema existieren ebenfalls wegen der Beschränktheit der Folge (x_n) .

Die Folge (y_n) ist also nach oben beschränkt. Da sie auch monoton steigt, besitzt sie einen Grenzwert *s*. Es wird im folgenden gezeigt, daß dieser Grenzwert auch Grenzwert der Cauchyfolge (x_n) sein muß und diese daher konvergiert:

Sei $\varepsilon>0$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=s$ gibt es ein $n_1\in\mathbb{N}$ mit $|y_n-s|<\varepsilon/3$ für $n\geqslant n_1$. Da (x_n) Cauchyfolge ist, gibt es ein $n_2\in\mathbb{N}$ mit $|x_n-x_m|<\varepsilon/3$ für $n,m\geqslant n_2$. Man wähle jetzt $n_0:=\max\{n_1,n_2\}$. Aufgrund der Definition von y_{n_0} gibt es ein $n_3\geqslant n_0$, so daß $y_{n_0}\leqslant x_{n_3}<y_{n_0}+\varepsilon/3$, also $0\leqslant x_{n_3}-y_{n_0}<\varepsilon/3$

Ist nun $n\geqslant n_0$, so folgt:
$|x_n-s|=|(x_n-x_{n_3})+(x_{n_3}-y_{n_0})+(y_{n_0}-s)|\leqslant|x_n-x_{n_3}|+|x_{n_3}-y_{n_0}|+|y_{n_0}-s|<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon$.

Damit ist nachgewiesen, daß $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=s$.

Bemerkung:

Man könnte auch umgekehrt zeigen:

Ist K ein archimedisch angeordneter Körper, in welchem jede Cauchyfolge konvergiert, so besitzt in ihm jede nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum.

Interessant dabei erscheint, daß man die Voraussetzung "archimedisch" an dieser Stelle braucht, während sie sich oben als Konsequenz ergab.

Jedenfalls haben wir den Zusammenhang der "Supremumsvollständigkeit" und der "Cauchyfolgen-Vollständigkeit" etwas beleuchtet. Die "Cauchyfolgen-Vollständigkeit" ist für uns deshalb interessant, weil sie sich für metrische Räume definieren läßt, auf denen es keine natürliche Ordnung gibt, z.B. die Räume $\mathbb{R}^n$. Andererseits waren die reellen Zahlen als archimedisch angeordneter Körper definiert, für den sich die "Supremumsvollständigkeit" unmittelbar formulieren läßt.