Musterlösung Blatt 9 Aufgabe 4

Aufgabe 4

Die Matrix $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ beschreibt eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt mit dem Drehwinkel φ. Daher beschreibt $D=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine entsprechende Drehung im $\mathbb{R}^3$ um die z-Achse. Weiterhin sei $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ eine orthonormale Matrix, also eine Matrix für die gilt $A^t \cdot A=E$, bzw. $A^t=A^{-1.}$. Dies bedeutet gerade, daß in den Spalten von A nur Einheitsvektoren stehen, die paarweise orthogonal sind. A kann als lineare Abbildung interpretiert werden, welche die kanonische Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ in die durch die Spaltenvektoren gegebene Orthonormalbasis abbildet.

Die Abbildung $x \to ADA^{-1}x$, also ADA^{-1}, kann daher als Drehung um die durch den Vektor $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gegebene Achse angesehen werden, sollte also nicht von $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ abhängen.

Man rechne daher ADA^{-1} so aus, daß in dieser Matrix schließlich nur die Größen $\sin\varphi, \cos\varphi, b_1, b_2, b_3$ vorkommen, nicht aber $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}$.

Lösung:

Die durch die Matrix ADA^{-1} gegebene Abbildung, die ja als Produkt von Drehungen selbst eine Drehung ist, bildet den Vektor $\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ auf sich selbst ab:

Es ist ja $Ae_3=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$, also $A^{-1}\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}=e_3$ und daher $(ADA^{-1})\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}=AD\,e_3=A\,e_3=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$, d.h. die Drehachse b ist gerade der dritte Spaltenvektor von A. Wir haben also $b_1=a_{13}, b_2=a_{23}, b_3=a_{33}$

Setzen wir $B:=ADA^{-1}$ und $u:=\cos\phi$, $v:=\sin\phi$. Da die Matrix A orthonormal ist, gilt $A^t \cdot A=E$, also $A^{-1}=A^t$, so daß wir die Matrix A^{-1} nicht ausrechnen müssen und von $B=ADA^t$ ausgehen können.

Ich lasse mir beim Ausrechnen dieses Matrizenprodukts von Pari helfen:

```
A=A=[a11,a12,b1;a21,a22,b2;a31,a32,b3]
D=[u,-v,0;v,u,0;0,0,1]
```

```
B=A*D*mattranspose(A)

B[1,1]
ergibt dann den Output
b1^2 + (u*a11^2 + u*a12^2)
```

Es gilt also $b_{11}=b_1^2+u(a_{11}^2+a_{12}^2)=b_1^2+u(1-b_1^2)=u+b_1^2(1-u)$. Dabei habe ich ausgenutzt, daß auch der Zeilenvektor (a_{11}, a_{12}, b_1) der orthonormalen Matrix A die Länge 1 besitzt, wie wir wissen. Wegen $a_{11}^2+a_{12}^2+b_1^2=1$ ist dann eben $a_{11}^2+a_{12}^2=1-b_1^2$.

Wir erhalten entsprechende Ausdrücke für die anderen Hauptdiagonalelemente der Matrix B, und für dieses Ergebnis könnte es schon die Hälfte der Punkte geben.

Was ist mit den anderen Koeffizienten der Matrix B ?

B[1,2]
ergibt den Output

```
b2*b1 + ((u*a21 - v*a22)*a11 + (v*a21 + u*a22)*a12)
```

also $b_{12}=b_1 b_2+(u\, a_{21}-v\, a_{22})\, a_{11}+(v\, a_{21}+u\, a_{22})\, a_{12}=b_1 b_2+u(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22})-v(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})$.

Der erste Summand $b_1 b_2$ ist ok.
Nun ist $a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+b_1 b_2=0$, denn es handelt sich um das Skalarprodukt der ersten beiden Spaltenvektoren der orthonormalen Matrix A^t (bzw. der ersten beiden Zeilenvektoren der orthonormalen Matrix A). Also ist $a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}=-b_1 b_2$.
Damit ist der zweite Summand gleich $-u\, b_1 b_2$, und das ist auch ok.

Beim dritten Summand muß man erkennen, daß es sich um die dritte Komponente des Kreuzprodukts $a_1\times a_2$ der ersten beiden Spaltenvektoren der Matrix A handelt. Wir wissen, daß das Kreuzprodukt von zwei linear unabhängigen Vektoren senkrecht auf diesen steht. Wir rechnen gleich nach, daß das Kreuzprodukt von zwei aufeinander senkrecht stehenden Einheitsvektoren wieder ein Einheitsvektor ist. Nun ist aber die Matrix A orthonormal, also steht die dritte Spalte, nämlich der Vektor b, senkrecht auf den Spaltenvektoren a_1 und a_2 .

Daher muß $b=a_1\times a_2$ oder $b=-a_1\times a_2$ gelten.

Im ersten Fall ist $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=b_3$ und wir haben $b_{12}=b_1 b_2(1-u)-v\, b_3$
Im zweiten Fall ist $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=-b_3$, und wir haben $b_{12}=b_1 b_2(1-u)+v\, b_3$.

Für die restlichen Koeffizienten von B erhält man analoge Ausdrücke.

Zeigen wir noch, daß das Kreuzprodukt $a \times b$ zweier aufeinander senkrecht stehender Einheitsvektoren a,b ein Einheitsvektor ist. Daß $a \times b$ senkrecht auf a und senkrecht auf b steht, wissen wir ja schon.

$$
\begin{aligned}
&\|a \times b\|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = \\
&a_2^2 b_3^2 - 2 a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2 + \\
&a_3^2 b_1^2 - 2 a_1 a_3 b_1 b_3 + a_1^2 b_3^2 + \\
&a_1^2 b_2^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2 = \\
&a_1^2 (b_2^2 + b_3^2 + b_1^2) - a_1^2 b_1^2 + \\
&a_2^2 (b_1^2 + b_2^2 + b_2^2) - a_2^2 b_2^2 + \\
&a_3^2 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - a_3^2 b_3^2 + \\
&-2 a_2 a_3 b_2 b_3 - 2 a_1 a_3 b_1 b_3 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2 = \\
&a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 = \\
&1 - 0 = 1
\end{aligned}
$$

Zum Schluß soll noch einmal demonstriert werden, daß nicht nur die Spaltenvektoren, sondern auch die Zeilenvektoren einer orthonormalen Matrix eine Orthonormalbasis bilden:

A ist genau dann orthonormal, wenn $A^t A = E$, bzw. wenn $A^t = A^{-1}$. Es ist dann auch $(A^t)^t \cdot A^t = A \cdot A^t = A \cdot A^{-1} = E$. Also ist A^t orthonormal, d.h. die Spaltenvektoren von A^t bilden eine Orthonormalbasis. Die Spaltenvektoren von A^t sind aber gerade die Zeilenvektoren von A und diese bilden daher eine Orthonormalbasis.