Mathematik II, Analysis und Lineare Algebra, Sommersemester 2011
M. Hortmann

Blatt 11, Aufg. 2b

Musterlösung einer etwas modifizierten Aufgabe:

Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2$ und sei $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Man zeige durch direkte Überprüfung der Definition von Differenzierbarkeit, daß *f* in $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ differenzierbar ist und daß für Ableitung gilt: $Df\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (2x_0, 2y_0)$. Man schreibe also

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + (2x_0, 2y_0)\cdot\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und zeige, daß $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (x,y)\neq(x_0,y_0)}} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\, r\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

Zu zeigen ist (ich gehe aus typographischen Gründen zu einer Zeilenvektorschreibweise über):

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists \delta > 0 \,\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \neq x_0 \text{ oder } y \neq y_0) \text{ und } \|(x-x_0, y-y_0)\| < \delta \;\Rightarrow\; \frac{|r(x,y)|}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} < \varepsilon .$$

Dies ist offenbar äquivalent zu

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists \delta > 0 \,\forall x, y \in \mathbb{R}: \; \|(x-x_0, y-y_0)\| < \delta \;\Rightarrow\; |r(x,y)| \;<\; \varepsilon\|(x-x_0, y-y_0)\| .$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
&|r(x,y)| = |f(x,y) - f(x_0,y_0) - Df(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0)| = \\
&|x^2 - y^2 - x_0^2 - y_0^2 - 2x_0(x-x_0) - 2y_0(y-y_0)| \leqslant |x^2 - x_0^2 - 2x_0(x-x_0)| + |y^2 - y_0^2 - 2y_0(y-y_0)| \leqslant \\
&|(x+x_0)(x-x_0) - 2x_0(x-x_0)| + |(y+y_0)(y-y_0) - 2y_0(y-y_0)| = \\
&|(x-x_0)(x-x_0)| + |(y-y_0)(y-y_0)| = |x-x_0||x-x_0| + |y-y_0||y-y_0| \leqslant \\
&|x-x_0|\|(x-x_0, y-y_0)\| + |y-y_0|\|(x-x_0, y-y_0)\| = (|x-x_0| + |y-y_0|)\|(x-x_0, y-y_0)\|
\end{aligned}$$

Beim letzten $\leqslant$ in der vorletzten Zeile wurde benutzt, daß $|a| \leqslant \sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2} = \|(a,b)\|$.

Ist nun $\|(x-x_0, y-y_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \frac{\varepsilon}{2}$, so folgt $|x-x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|y-y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, also $(|x-x_0| + |y-y_0|) < \varepsilon$.

Wählen wir nun $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, so folgt für $\|(x-x_0), (y-y_0)\| < \delta$, daß $|r(x,y)| < \varepsilon\|(x-x_0, y-y_0)\|$.

Was zu beweisen war.