Konvergenz der Reihe $\sum_p \frac{1}{p}$

Folgendes Wissen über Primzahlen wird benötigt:

1. Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl größer als 1, welche in den natürlichen Zahlen nur 1 und sich selbst als Teiler besitzt.

2. Teilt eine Primzahl ein Produkt natürlicher Zahlen, so teilt sie einen der Faktoren.

3. Jede natürliche Zahl größer als 1 besitzt eine bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutige Primfaktorzerlegung. Damit besitzt auch jede natürliche Zahl einen Primteiler.

4. Es gibt unendlich viele Primzahlen.
   Gäbe es nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$, so bilden wir die Zahl $N := p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. N muß einen Primteiler p besitzen. Dieser kann aber nicht unter den Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ vorkommen, da N bei Division durch jedes der p_i den Rest 1 läßt. Also gibt es mehr Primzahlen als $p_1, \ldots, p_n$.

Wir können die Menge der Primzahlen der Größe nach ordnen und erhalten die Folge (p_n) : also $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7$, $\ldots$.

Satz: die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ ist divergent.

Bedenkt man, daß z.B. die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, so heißt dies auch, daß die Folge der Primzahlen dichter liegt als die Folge der Quadratzahlen.

Beweis:

Wir benötigen die Abschätzung $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$.
Dies beweist man leicht durch Induktion: für n=1 haben wir $p_1 = 2 = 2^{2^0}$.
Wir benutzen als Induktionsvoraussetzung daß die Ungleichung $p_k \leqslant 2^{2^{k-1}}$ für alle $k \leqslant n$ gilt und müssen zeigen, daß daraus $p_{n+1} \leqslant 2^{2^n}$ folgt.
Bilden wir dazu die Zahl $N = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. N wird von einer Primzahl p geteilt, die verschieden von $p_1, \ldots, p_n$ ist und für die daher $p_{n+1} \leqslant p$ gilt. Insgesamt haben wir damit

$$p_{n+1} \leqslant p \leqslant N \;=\; p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1 \;\leqslant\; 2^{2^0} \cdot 2^{2^1} \cdot 2^{2^2} \cdot \ldots \cdot 2^{2^{n-1}} + 1 \;=\; 2^{\sum_{i=0}^{n-1} 2^i} + 1 \;=\; 2^{2^n - 1} + 1 \;\leqslant\; 2^{2^n}.$$

Damit ist obige Abschätzung bewiesen[1].

---

1 Es wurde die in der Vorlesung bewiesene Formel $\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{q^n - 1}{q - 1}$ benutzt .

Nehmen wir an, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ sei konvergent. Dann gibt es ein $M \in \mathbb{N}$, so daß $\sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \leqslant \frac{1}{2}$.

Ist jetzt n eine beliebige natürliche Zahl, so betrachten wir in der Menge $\mathbb{N}_n = \{1, \ldots, n\}$ die Teilmenge A_n derjenige Zahlen, welche durch einen Primfaktor größer als p_M teilbar sind. Das Komplement $B_n := \mathbb{N}_n \setminus A_n$ enthält dann diejenigen Elemente von $\mathbb{N}_n$, deren sämtliche Primfaktoren kleiner oder gleich p_M sind.

Ist p eine beliebige Primzahl, so bezeichnen wir die Teilmenge der Elemente von $\mathbb{N}_n$, die durch p teilbar sind, mit C_p. Offenbar ist die Elementezahl von C_p kleiner oder gleich n/p. Daraus und aus der Tatsache, daß $A_n = \bigcup_{i=M+1}^{\infty} C_{p_i}$ folgt sofort: $|A_n| \leqslant \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{n}{p_i} = n \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{p_i} \leqslant \frac{n}{2}$.

Jedes Element $m \in B_n$ besitzt eine Primfaktorzerlegung $m = \prod_{i=1}^{M} p_i^{\alpha_i}$. Diese können wir aufspalten in einen quadratischen Anteil und einen Rest: $m = \prod_{i=1}^{M} p_i^{2\beta_i} \cdot \prod_{i=1}^{M} p_i^{\gamma_i} = m_1^2 \cdot \prod_{i=1}^{M} p_i^{\gamma_i}$ mit $\gamma_i \in \{0, 1\}$.
Offenbar gibt es 2^M Möglichkeiten, die γ_i zu wählen, während es höchstens $\sqrt{n}$ Möglichkeiten gibt, den Faktor m_1 zu wählen. Damit haben wir für die Elementezahl von B_n die Abschätzung $|B_n| \leqslant 2^M \sqrt{n}$. Insgesamt also:

$n = |A_n| + |B_n| \leqslant \frac{n}{2} + 2^M \sqrt{n}$, woraus sofort $\frac{n}{2^{M+1}} \leqslant \sqrt{n}$ folgt.

Da wir n beliebig wählen können während M fest war, kann diese Ungleichung für große n nicht mehr stimmen. Die Annahme, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ konvergent ist, führt also zum Widerspruch!