Vorlesungen vom 21. und 24.6.

Differenzierbarkeit

Man möchte eine Abbildung in der Umgebung eines Punktes durch eine lineare Abbildung approximieren. Dies geschieht am besten im Kontext normierter Vektorräume. Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur die Räume $\mathbb{R}^n$.

Gehen wir also aus von einer offenen Teilmenge U subset $\mathbb{R}^n$, einem Punkt $x_0 \in U$ und einer Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$.

f heißt in x_0 differenzierbar, wenn es eine Matrix $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ gibt, so daß für alle $x \in U$ gilt:
$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + r(x)$, wobei $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{1}{\|x - x_0\|} r(x) = 0$.

Ist f in x_0 differenzierbar, so ist die Matrix A eindeutig bestimmt und heißt Ableitung von f in x_0 .
Man setzt dann $Df(x_0) := f'(x_0) := A$.

Im Spezialfall n=m=1 ist $f'(x_0)$ eine 1x1-Matrix, welche man meist als reelle Zahl auffaßt, d.h. man denkt sich $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ statt $f'(x_0) \in M_{1 \times 1}(\mathbb{R})$. In diesem Fall rechnet man leicht nach, daß
$f'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, d.h. die Ableitung ist der "Grenzwert des Differenzenquotienten".

Man kann jetzt sofort zeigen, daß konstante Abbildungen und lineare Abbildungen bzw. die Summe einer linearen und einer konstanten Abbildung in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs differenzierbar sind. Im ersten Fall ist die Abbildung die Nullmatrix, im zweiten bzw. dritten Fall gleich der zur betreffenden linearen Abbildung gehörigen Matrix.

Außerdem folgt aus der Differenzierbarkeit einer Abbildung in einem Punkt ihre Stetigkeit dort.

Die wichtigste Ableitungsregel ist zweifellos die **Kettenregel:**
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen. Es sei $x_0 \in U$, $y_0 \in V$. Außerdem seien Abbildungen $f : U \to \mathbb{R}^m$ und $g : V \; set \; R^k$ gegeben, wobei $f(U) \subset V$ und $f(x_0) = y_0$. Schließlich sei f differenzierbar in x_0 und g differenzierbar in y_0 .

Dann ist die Abbildung $g \circ f : U \to \mathbb{R}^k$ in x_0 differenzierbar, und für die Ableitung gilt
$D(g \circ f)(x_0) = Dg(y_0) \cdot Df(x_0)$

Die Ableitung der Hintereinanderschaltung ("Verkettung") von Abbildungen ist also die Hintereinanderschaltung der Ableitungen.

Zusammenhang der Ableitung einer Abbildung mit den Ableitungen der Komponenten

Eine Abbildung $f: U \to \mathbb{R}^m$ läßt sich schreiben als $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$, wobei $f_i: U \to \mathbb{R}$. Die Komponentenfunktionen f_i lassen sich auch schreiben als $f_i = \pi_i \circ f$, wobei $\pi_i: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ einen Vektor auf seine *i*-te Komponente abbildet. π_i ist linear und wird bezüglich der kanonischen Basis durch die Matrix $(0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$ dargestellt. Nach Kettenregel sind dann mit *f* auch die Funktionen f_i in $x_0 \in U$ differenzierbar und es gilt $Df_i(x_0) = \pi_i \cdot Df(x_0)$, d.h. $Df_i(x_0)$ ist die *i*-te Zeile der mxn Matrix $Df(x_0)$.

Umgekehrt kann man zeigen, daß mit den Funktionen f_i auch die Abbildung *f* in x_0 differenzierbar ist, und daß die Ableitungsmatrix $Df(x_0)$ sich aus den Zeilen, welche von den $Df_i(x_0)$ gebildet werden, zusammensetzt.

Kurven im $\mathbb{R}^n$

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so läßt sich eine stetige Abbildung $c: I \to \mathbb{R}^n$ als Kurve interpretieren oder auch als Bahn eines Punktes, wobei *c*(*t*) die Position des Punktes zum Zeitpunkt *t* ist.

Auch hier hat man eine Darstellung von $c(t)$ durch die Komponentenfunktionen $c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$, wobei $c_i: I \to \mathbb{R}$. Falls die Ableitung $c'(t_0)$ existiert, läßt sie sich als Vektor $c'(t_0) = \begin{pmatrix} c_1'(t_0) \\ \vdots \\ c_n'(t_0) \end{pmatrix}$ auffassen und als Geschwindigkeitsvektor zur Zeit t_0 im Punkt $c(t_0)$ interpretieren.

Partielle Ableitungen

Wir können zu den Koordinatenachsen parallele Kurven durch den Punkt x_0 legen, indem wir $c_i(t) = x_0 + t\, e_i$ setzen. Ist $x_0 \in U$ und *U* offen, so gibt es eine ε-Kugel $U_\varepsilon(x_0) \subset U$, und daher können die Abbildungen c_i als Kurven $c_i:]-\varepsilon, \varepsilon[\to U$ aufgefaßt werden. Die c_i sind von der Form "Konstante + lineare Abbildung" und daher differenzierbar in $t_0 = 0$, wobei $c_i'(0) = e_i$. Man rechnet leicht mit der Kettenregel nach:

Ist $f: U \to \mathbb{R} \in x_0$ differenzierbar, so sind die Funktionen $f \circ c_i$ in $t_0 = 0$ differenzierbar.

Dabei ist einerseits ist $(f \circ c_i)'(0) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \dfrac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}$, andererseits nach Kettenregel $(f \circ c_i)'(0) = Df(x_0)\, e_i$, wobei wir den Einheitsvektor e_i als Matrix mit einer Spalte und *n* Zeilen interpretieren. Nun ist $Df(x_0)$ eine Matrix mit einer Zeile und n-Spalten, und die Gleichung $(f \circ c_i)'(0) = Df(x_0)\, e_i$ bedeutet, daß $Df(x_0) = \left((f \circ c_1)'(0), \ldots, (f \circ c_n)'(0)\right)$.

Mit den Bezeichnungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) := (f \circ c_i)'(0)$ ergibt sich: $Df(x_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)(x_0)$.

Die Ausdrücke $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ nennt man "partielle Ableitungen von f in x_0 ".
Wenn die Variablen nicht x_1 , dotslow , x_n heißen, sondern x , y , z , w, so schreibt man $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0), \frac{\partial f}{\partial w}(x_0), .$

Wir können nun jedenfalls die Ableitung $Df(x_0)$, falls sie existiert, im Prinzip mit Hilfe der partiellen Ableitungen ausrechnen.