Cauchy-Produkt von Reihen

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen.

Dann gilt $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{0\leqslant n,m\leqslant k\\ n+m=k}} a_n b_m\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}\right)$.

Beweis:

Man setze $A:=\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $B:=\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $A_n:=\sum_{i=0}^{n} a_i$, $B_n:=\sum_{i=0}^{n} b_i$, $C_n:=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant k\\ i+j=k}} a_i b_j\right)=\sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j\leqslant n}} a_i b_j$

Damit ist $\lim_{n\to\infty} A_n=A$, $\lim_{n\to\infty} B_n=B$ und daher nach den Grenzwertsätzen für Folgen $\lim_{n\to\infty} A_n B_n=A\,B$.

Man setze außerdem $\overline{A}:=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$, $\overline{B}:=\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|$, $\overline{A}_n:=\sum_{i=0}^{n}|a_i|$, $\overline{B}_n:=\sum_{i=0}^{n}|b_i|$.

Damit ist $\lim_{n\to\infty}\overline{A}_n=\overline{A}$, $\lim_{n\to\infty}\overline{B}_n=\overline{B}$ und daher nach den Grenzwertsätzen für Folgen $\lim_{n\to\infty}\overline{A}_n\overline{B}_n=\overline{A}\,\overline{B}$.

Die Folge $\left(\overline{A}_n\overline{B}_n\right)$ ist also konvergent und damit eine Cauchyfolge, die im übrigen monoton steigt.

Geben wir nun $\varepsilon>0$ vor.

Da $\left(\overline{A}_n\overline{B}_n\right)$ monoton steigende Cauchyfolge ist, gibt es ein $n_0\in\mathbb{N}$, so daß für alle $k\geqslant n_0$ gilt:
$\overline{A}_k\overline{B}_k-\overline{A}_{[k/2]}\overline{B}_{[k/2]}<\varepsilon/2$. [1]

Außerdem gibt es wegen $\lim_{n\to\infty} A_n B_n=A\,B$ ein $m_0\in\mathbb{N}$, so daß für alle $k\geqslant m_0$:

$$\left|AB-A_k B_k\right|=\left|AB-\left(\sum_{n=0}^{k} a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{k} b_m\right)\right|<\varepsilon/2\,.$$

Wir müssen zeigen, daß es ein $k_0\in\mathbb{N}$ gibt, so daß für $k\geqslant k_0$ gilt $\left|AB-C_k\right|<\varepsilon$.

Wählen wir dazu $k_0:=\max\{n_0, m_0\}$ und geben $k\geqslant k_0$ beliebig vor. Dann ergibt sich:

$$|AB-C_k|=\left|AB-\left(\sum_{n=0}^{k} a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{k} b_m\right)+\left(\sum_{n=0}^{k} a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{k} b_m\right)-C_k\right|\leqslant$$

$$\left|AB-\left(\sum_{n=0}^{k} a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{k} b_m\right)\right|+\left|\left(\sum_{n=0}^{k} a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{k} b_m\right)-C_k\right|<\varepsilon/2+\left|\left(\sum_{n=0}^{k} a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{k} b_m\right)-C_k\right|$$

$$\left|\left(\sum_{n=0}^{k} a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{k} b_m\right)-C_k\right|=\left|\sum_{n=0}^{k}\sum_{m=0}^{k} a_n b_m-\sum_{\substack{0\leqslant n,m\leqslant k\\ n+m\leqslant k}} a_n b_m\right|=\left|\sum_{\substack{0\leqslant n,m\leqslant k\\ n+m>k}} a_n b_m\right|\leqslant\sum_{\substack{0\leqslant n,m\leqslant k\\ n+m>k}}|a_n||b_m|\leqslant$$

$$\sum_{n=0}^{k}\sum_{m=0}^{k}|a_n||b_m|-\sum_{n=0}^{[k/2]}\sum_{m=0}^{[k/2]}|a_n||b_m| \;=\; \overline{A}_k\overline{B}_k-\overline{A}_{[k/2]}\overline{B}_{[k/2]} \;<\; \varepsilon/2$$

Insgesamt also $|AB-C_k|<\varepsilon$, was zu beweisen war.

---

1 Für $x\in\mathbb{R}$ sei $[x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Also z.B. $[3\ 1/2]=3$.

Bemerkung:
Der entscheidende Schritt oben war die Ungleichung

$$\sum_{\substack{0\leqslant n,m\leqslant k\\ n+m>k}} |a_n||b_m| \leqslant \sum_{n=0}^{k}\sum_{m=0}^{k}|a_n||b_m| - \sum_{n=0}^{[k/2]}\sum_{m=0}^{[k/2]}|a_n||b_m| .$$

Ggf. betrachte man dazu folgendes Beispiel:

Ist z.B. $k=5$, so ist die Summe links gleich

$$\begin{aligned}
&|a_1||b_5|+|a_2||b_4|+|a_3||b_3|+|a_4||b_2|+|a_5||b_1|+\\
&|a_2||b_5|+|a_3||b_4|+|a_4||b_3|+|a_5||b_2|+\\
&|a_3||b_5|+|a_4||b_4|+|a_5||b_3|+\\
&|a_4||b_5|+|a_5||b_4|+\\
&|a_5||b_5|
\end{aligned} \qquad (1)$$

Nun ist $[k/2]=[5/2]=2$.

Die Differenz der Summen auf der Rechten Seite ist gerade

$$\begin{aligned}
&|a_0||b_0|+|a_0||b_1|+|a_0||b_2|+|a_0||b_3|+|a_0||b_4|+|a_0||b_5|+\\
&|a_1||b_0|+|a_1||b_1|+|a_1||b_2|+|a_1||b_3|+|a_1||b_4|+|a_1||b_5|+\\
&|a_2||b_0|+|a_2||b_1|+|a_2||b_2|+|a_2||b_3|+|a_2||b_4|+|a_2||b_5|+\\
&|a_3||b_0|+|a_3||b_1|+|a_3||b_2|+|a_3||b_3|+|a_3||b_4|+|a_3||b_5|+\\
&|a_4||b_0|+|a_4||b_1|+|a_4||b_2|+|a_4||b_3|+|a_4||b_4|+|a_4||b_5|+\\
&|a_5||b_0|+|a_5||b_1|+|a_5||b_2|+|a_5||b_3|+|a_5||b_4|+|a_5||b_5|-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|a_0||b_0|-|a_0||b_1|-|a_0||b_2|-\\
&|a_1||b_0|-|a_1||b_1|-|a_1||b_2|-\\
&|a_2||b_0|-|a_2||b_1|-|a_2||b_2|
\end{aligned}$$

und dies ist gleich

$$\begin{aligned}
&|a_0||b_3|+|a_0||b_4|+|a_0||b_5|+\\
&|a_1||b_3|+|a_1||b_4|+|a_1||b_5|+\\
&|a_2||b_3|+|a_2||b_4|+|a_2||b_5|+\\
&|a_3||b_0|+|a_3||b_1|+|a_3||b_2|+|a_3||b_3|+|a_3||b_4|+|a_3||b_5|+\\
&|a_4||b_0|+|a_4||b_1|+|a_4||b_2|+|a_4||b_3|+|a_4||b_4|+|a_4||b_5|+\\
&|a_5||b_0|+|a_5||b_1|+|a_5||b_2|+|a_5||b_3|+|a_5||b_4|+|a_5||b_5|
\end{aligned} \qquad (2)$$

Alle Summanden der Summe (1) kommen in der Differenz (2) vor.
Weil alle Summanden positiv sind, ist die Summe (1) kleiner oder gleich der Differenz (2).