Mathematik II, Analysis und Lineare Algebra, Sommersemester 2011
M. Hortmann

Blatt 11

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen							**Gruppe**	**Tutor**
1a	b	2a	b	3a	b	4	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	5 Punkte=100%	

Aufgabe 1

a) Man weise nach, daß $\lim\limits_{x\to\infty} x^2=\infty$.

b) Man weise nach, daß $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{x^2}=\infty$.

Aufgabe 2

a) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch $x\mapsto x^2$ und sei $x_0\in\mathbb{R}$.
Man zeige durch direkte Überprüfung der Definition von Differenzierbarkeit, daß f in x_0 differenzierbar ist und berechne die Ableitung $f'(x_0)$.

b) Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ gegeben durch $\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\mapsto xy$ und sei $\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$.

Man zeige durch direkte Überprüfung der Definition von Differenzierbarkeit, daß f in $\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\end{pmatrix}$ differenzierbar ist und daß für Ableitung gilt: $Df\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\end{pmatrix}=(y_0, x_0)$. Man schreibe also

$f\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\end{pmatrix}+(y_0, x_0)\cdot\begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$ und zeige, daß $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\neq(x_0,y_0)}} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\, r\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=0$.

Aufgabe 3

Die Abbildungen $\sin, \cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$, $\cos'(x_0) = -\sin(x_0)$.

Man definiert für $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

a) Man berechne mit Hilfe der Quotientenregel $\tan'(x)$.
b) Die Abbildung $\tan:]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ ist bijektiv; die inverse Abbildung $\mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ erhält den Namen arctan (Arcus Tangens). Nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist arctan überall differenzierbar. Man benutze diesen Satz bzw. die Kettenregel, um für $y_0 \in \mathbb{R}$ die Ableitung $\arctan'(y_0)$ zu berechnen.

Aufgabe 4

Sei $f(x, y, z) = xyz$. Die dadurch gegebene Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist ein Polynom und daher für alle $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ differenzierbar.

Man berechne die Ableitung $Df(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0), \frac{\partial f}{\partial z}(a_0) \right)$, indem man die in dieser Formel vorkommenden partiellen Ableitungen bestimmt.

Bemerkung
Man erinnere sich an die folgenden Schreibweisen:

Ist $f: M \to N$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen, $x_0 \in M$, $y_0 \in N$, so definiert man $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ durch $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in M: \; d(x, x_0) < \delta \;\to d(f(x), y_0) < \varepsilon$.

Manchmal ist $f(x_0)$ nicht definiert oder irgendwie irregulär, und man will nur die Abbildung $f: M \setminus \{x_0\} \to N$ betrachten. Man schreibt dann $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = y_0$ für

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in M: \; (x \neq x_0 \text{ und } d(x, x_0) < \delta) \;\to d(f(x), y_0) < \varepsilon$.

Ist $f(x_0) = y_0$, so ist die Stetigkeit von f in x_0 äquivalent sowohl zu $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ wie auch zu $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = y_0$.

Setzt man z.B. für $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$, so ist die dadurch gegebene Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unstetig im Punkt $x_0 = 0$. Der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert nicht, wie man sofort sieht. Andererseits sieht man auch sofort, daß $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x)$ existiert und daß gilt $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$.