Mathematik II, Analysis und Lineare Algebra, Sommersemester 2011
M. Hortmann

Blatt 10

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen					**Gruppe**	**Tutor**
1a	b	c	2a	b	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	4 Punkte=100%	

Aufgabe 1

Man betrachte die Matrix $A:=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$ und berechne die Determinante

a) über die definierende Formel $\det(A)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_4} \varepsilon_\sigma\, a_{\sigma(1)1}\cdot a_{\sigma(2)2}\cdot a_{\sigma(3)3}\cdot a_{\sigma(4)4}$.

b) indem Sie die Matrix durch geeignete Zeilen/Spaltenvertauschungen und Addition von Zeilen/Spalten zu anderen Zeilen/Spalten auf obere Dreiecksgestalt bringen.

c) Ist eine Matrix $A\in M_{n\times n}(K)$ gegeben und $1\le i\,,\, j\le n$, so sei A_{ij} diejenige (n-1)×(n-1)-Matrix, die entsteht, wenn man in A die i-te Zeile und die j-te Spalte wegstreicht.

Setzt man $b_{ij}:=(-1)^{i+j}\det A_{ji}$, so gilt $A\cdot B=B\cdot A=\det(A)\,E_n=\begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \det(A) \end{pmatrix}$.

Ist demnach $\det(A)\neq 0$, so ist $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}B$, und man hat eine weitere Methode zur Berechnung der Inversen einer Matrix, aber auch zur Berechnung der Determinante.

Man berechne hier nun für die obige Matrix A die erste Spalte der zugehörigen Matrix B und dann det(A) als Produkt der ersten Zeile von A und der ersten Spalte von B. [1]

1Wem das zuviel Rechnerei ist, kann z.B. das Element b_{11} mit Hilfe des Pari-Befehls `matdet(vecextract(A,[2,3,4],[2,3,4]))`berechnen, nachdem die Matrix A zunächst durch die Befehle `A=[4,2,3,3;1,1,1,2;2,2,3,1;1,3,2,4]` und `A=Mod(A,5)` präpariert wurde. Details zum Befehl `vecextract` mittels `?vecextract` .

Aufgabe 2

Man betrachte die Menge $\mathrm{SU}(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$.

a) Man zeige, daß es sich dabei um eine Untergruppe der Gruppe der invertierbaren 2x2-Matrizen mit komplexen Koeffizienten handelt, also um eine Untergruppe der Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.

b) Zu einem Element $A := \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$ betrachte man die reelle 3x3-Matrix

$$\Phi(A) := \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a^2 - b^2) & \mathrm{Im}(a^2 + b^2) & -2\,\mathrm{Re}(ab) \\ -\mathrm{Im}(a^2 - b^2) & \mathrm{Re}(a^2 + b^2) & 2\,\mathrm{Im}(ab) \\ 2\,\mathrm{Re}(a\bar{b}) & 2\,\mathrm{Im}(a\bar{b}) & |a|^2 - |b|^2 \end{pmatrix} .$$

$\Phi(A)$ ist eine Rotationsmatrix, d.h. die Spaltenvektoren bilden immer eine Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^3$. [2]

Man rechne von dieser Behauptung einen Teil nach:
daß der zweite und dritte Spaltenvektor von $\Phi(A)$ Einheitsvektoren sind, und daß der erste Spaltenvektor senkrecht auf dem zweiten und auf dem dritten steht.

2 Es gilt sogar: Φ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus SU(2) -> SO(3), und ker $\Phi = \{E, -E\}$.