Mathematik II, Analysis und Lineare Algebra, Sommersemester 2011
M. Hortmann

Blatt 7

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen						**Gruppe**	**Tutor**
1a	b	c	2	3	4	**Summe**	**bearbeitet**
2	1	1	1	1	1	6 Punkte=100%	

1. Aus der Funktionalgleichung der komplexen Exponentialfunktion hatten wir die "Additionstheoreme" für Cosinus und Sinus hergeleitet: $\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$ sowie $\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$.
Für $x\in\mathbb{R}$ ist $|\exp(ix)|=1$; wegen $\exp(ix)=\cos(x)+i\sin(x)$ gilt also für reelles x: $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$. Offenbar gilt auch $\forall\, x\in\mathbb{C}: \cos(-x)=\cos(x), \sin(-x)=-\sin(x)$.
Weil $\cos(0)=1$ und $\cos(2)<0$, gibt es zwischen 0 und 2 eine Nullstelle x_0 der Cosinusfunktion. Man setzt $\pi:=2x_0$, so daß $\cos(\pi/2)=0$.

a) Mit den obigen Formeln und Aussagen berechne man die Werte von Cosinus und Sinus für folgende Zahlen: $\pi/2, \pi, \pi/4, 2\pi/3, \pi/3, \pi/6$ (wobei $\cos(\pi/2)=0$ schon bekannt ist) .

b) Zeige $\forall\, x\in\mathbb{C}$: $\sin(x+2\pi)=\sin(x), \sin(x+\pi/2)=\cos(x)$

c) Seien $x, y\in\mathbb{C}$, und $\cos(x), \cos(y)$ sowie $\cos(x+y)\neq 0$. Zeige $\tan(x+y)=\dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$.

2. Betrachten Sie die Partialsummen der Exponentialreihe $s_n:=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}$, sowie die Partialsummen $t_n:=\sum_{i=1}^{n}-\frac{x^i}{i}$. Setzen Sie nun für einige n t_n für x in s_n ein. Was beobachten Sie? Formulieren Sie eine Vermutung für alle $n\in\mathbb{N}$! Sei $f(x):=\sum_{i=1}^{\infty}-\frac{x^i}{i}$. Können Sie Ihre Vermutung auf eine Formel für $\exp(f(x))$ ausdehnen?

3. Die Abbildung $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mapsto x+i\,y$ ist bijektiv. Ist $z=u+iv\in\mathbb{C}$, so gibt es eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, so daß $\varphi^{-1}\left(z\cdot\left(\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Man berechne die Koeffizienten dieser Matrix. Wie sieht die Matrix im Spezialfall $z=\exp(i\varphi)$, $\varphi\in\mathbb{R}$, aus?

4. Sei $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}\in M_{3\times 3}(K)$, deren Diagonalelemente alle von 0 verschieden sind.

Finden Sie eine Matrix $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}\in M_{3\times 3}(K)$, so daß BA gleich der 3x3-Einheitsmatrix ist.

Beschreiben Sie Ihren Lösungsweg.