Mathematik II, Analysis und Lineare Algebra, Sommersemester 2011
M. Hortmann

Blatt 6

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen					**Gruppe**	**Tutor**
1a	b	c	d	e	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	4 Punkte=100%	

1. Man betrachte die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$.

a) Man zeige: wählt man $n_0 = 40$, so gilt für $z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant 10$: $\left\| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \right\| \leqslant 10^{-3}$.

Hinweis: Man bestimme beispielsweise eine Zahl $m_0 \in \mathbb{N}$, ab der die Summanden der Reihe dem für alle $z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant 10$ dem Betrage nach unterhalb von 1 liegen. Man zeige, daß ab diesem m_0 auch die Quotienten aufeinanderfolgender Summanden unterhalb ½ liegen. Ab dem Index m_0 kann man also die Koeffizienten der Reihe durch die Koeffizienten einer geometrischen Reihe abschätzen. Mit der zugehörigen Summenformel läßt sich jetzt bestimmmen, wieviel weiter man summieren muß, um auf die obige Schranke zu kommen.

b) Bei vorgegebenem $n_0 \in \mathbb{N}$ betrachte man die durch dieRekursion $s_0 := 1$, $s_{n+1} := \frac{s_n z}{n_0 - n} + 1$ definierte Folge $s_0, \ldots, s_{n_0}$. Man berechne diese Folge mit z als Variabler für $n_0 = 10$ und mache sich auf diese Weise klar, daß für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt: $s_{n_0} = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{1}{n!} z^n$.

Bemerkung: Die Berechnung der Summe über dieseRekursionsformel erfordert deutlich weniger Multiplikationen und Divisionen als die direkte Berechnung der Summe. Es treten dann auch deutlich weniger Rundungsfehler auf.

c) Mit Hilfe der Rekursionsformel aus b) berechne man mit dem in a) gewählten Wert von n_0 die Summe $\sum_{n=0}^{n_0} \frac{1}{n!} z^n$ für z=1, z=-1.

d) Man wähle n_0 wie in a) und schreibe kurz $f(\varphi) := \sum_{n=0}^{n_0} \frac{1}{n!}(i\varphi)^n$. Man finde reelle Zahlen $a_0, b_0 \in [0,2]$, so daß $\operatorname{Re} f(a_0) > 0$ und $\operatorname{Re} f(b_0) < 0$, und konstruiere rekursiv Folgen (a_n) , (b_n) , (c_n) , $c_n := \frac{a_n + b_n}{2}$ durch $a_{n+1} := \begin{cases} c_n & \text{falls} \quad \operatorname{Re} f(c_n) > 0 \\ a_n & \text{sonst} \end{cases}$, $b_{n+1} := \begin{cases} c_n & \text{falls} \quad \operatorname{Re} f(c_n) \leqslant 0 \\ b_n & \text{sonst} \end{cases}$.
Man breche die Berechnung der Folgen ab, sobald $b_n - a_n \leqslant 10^{-3}$.

Welchen Wert erhalten Sie für das letzte a_n ? Wieso erhalten Sie damit näherungsweise eine Nullstelle der Cosinusfunktion?

e) Man wähle f wie in d) und erzeuge eine graphische Darstellung der Werte von $f(\varphi)$ mit $0 \leqslant \varphi \leqslant 6$

Programmcode und Programmoutput sind sorgfältig zu dokumentieren und in den übrigen Text zu integrieren.