Mathematik II, Analysis und Lineare Algebra, Sommersemester 2011
M. Hortmann

Blatt 5

bitte heften Sie dieses Blatt vor Ihre Lösungen

Namen								**Gruppe**	**Tutor**
1a	b	c	2a	b	3a	b	4	**Summe**	**bearbeitet**
1	1	1	1	1	1	1	1	7 Punkte=100%	

1.
a) Man gebe ein Beispiel einer unbeschränkten Funktion $f:[1,2]\to\mathbb{R}$. (Beweis!)
b) Man gebe ein Beispiel einer unbeschränkten stetigen Funktion $f:]1,2[\to\mathbb{R}$. (Beweis!)
c) Man betrachte die Funktion $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$, gegeben durch $f(x)=x^3-3x$, und zeige, daß f in den Punkten -2 und 1 ein Minimum, und in den Punkten -1 und 2 ein Maximum annimmt. (Keine Differentialrechnung benutzen!)

2. Für $n\in\mathbb{N}$ und $x\in[0,1]$ setze man $f_n(x):=\begin{cases} nx & \text{für} \quad 0\leqslant x\leqslant 1/n \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$.
a) Für jedes $x\in[0,1]$ zeige man, daß die Folge $(f_n(x))$ konvergiert und berechne den Grenzwert und bezeichne ihn mit f(x) .
Dadurch wird eine Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definiert.
b) Man zeige: die Funktionenfolge (f_n) konvergiert nicht gleichmäßig gegen f.
(Gleichmäßige Konvergenz würde bedeuten: $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\in[0,1]:\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.)

3.
a) Man zeige, daß die Menge $\{(x,y)|\ x^2+y^2<1\}$ offen in $\mathbb{R}^2$ ist.
b) Man zeige, daß die Menge $\{(x,y)|\ x^2+y^2\leqslant 1\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist.

Bemerkung: Sie können jede der Ihnen bekannten Metriken im $\mathbb{R}^2$ benutzen. Mit der Euklidischen Metrik gelingt es am einfachsten.

4.
Für $n\geqslant 2$ setze man $a_n:=\dfrac{1}{n^2-1}$. Man finde eine Formel für die Partialsummen der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ und benutze diese, um den Grenzwert der Reihe zu berechnen.