Lineare Algebra 2, SS06
M. Hortmann

Blatt 11

Aufgabe 1

Man betrachte die kanonische Projektion $\pi : K^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n(K)$, die durch $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ gegeben ist. Eine invertierbare lineare Abbildung $\varphi : K^{n+1} \to K^{n+1}$ induziert eine zugehörige (wohldefinierte) Abbildung $\overline{\varphi} : \mathbb{P}^n(K) \to \mathbb{P}^n(K)$ via $\pi(x) \to \pi(\varphi(x))$. Eine derartige Abbildung nennt man projektiv.

a) Man zeige: $\varphi, \psi : K^{n+1} \to K^{n+1}$ induzieren genau dann dieselbe projektive Abbildung, wenn es ein $\lambda \in K^*$ gibt mit $\psi = \lambda \varphi$.

b) Gegeben seien 3 voneinander verschiedene Punkte $p, q, r \in \mathbb{P}^1(K)$ und drei weitere voneinander verschiedene Punkte $p', q', r' \in \mathbb{P}^1(K)$. Man zeige: es gibt genau eine projektive Abbildung $\mathbb{P}^1(K) \to \mathbb{P}^1(K)$ mit $p \to p'$, $q \to q'$, $r \to r'$.

Aufgabe 2

Sei p eine Primzahl.

Für $n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0$ setze man $\|n\|_p := 2^{-k}$, falls k die höchste Potenz von p ist, die in n aufgeht.
Außerdem setze man $\|0\|_p := 0$.

a) Zeigen Sie, daß durch $\mathrm{d}_p(x, y) = \|x - y\|_p$ eine Metrik auf $\mathbb{Z}$ definiert wird.
b) Man wähle z.B. $p = 5$. Konstruieren Sie eine Folge von Zahlen $x_n \in \mathbb{Z}$, die eine Cauchyfolge bezüglich d_5 bilden, und für die $\lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{d}_5(3 \cdot x_n,\ 1) = 0$.
Wer sich mit konvergenten Folgen nicht auskennt, mag stattdessen eine Zahl x konstruieren, so daß $\mathrm{d}(3 \cdot x - 1, 1) < 2^{-20}$.

Aufgabe 3

Man betrachte die Matrix $A \in M_{1000}(\mathbb{R})$, die durch $a_{ij} = \begin{cases} 1\text{, falls } i = j \\ -0.5\text{, falls } |i-j| = 1 \end{cases}$ gegeben ist und den Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ mit $b_i = \begin{cases} 1\text{, falls } i \leqslant 490 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$

a) Begründen Sie, wieso das Gauß-Seidel Gesamtschrittverfahren zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ konvergiert.

b) Schreiben Sie konkreten Pari-Code und vergleichen Sie die Anzahl der für eine befriedigende Lösung benötigten Iterationsschritte beim Gauß-Seidel-Gesamtschrittverfahren und beim -Einzelschrittverfahren.

Dokumentieren Sie nachvollziehbar Ihren gesamten Lösungsweg.

Lesen Sie ggf. noch einmal die Einführung
http://www.informatik.uni-bremen.de/~michaelh/Lehrveranstaltungen/LinA1_WS05/Pari.html
Beachten Sie noch, daß Sie durch Anhängen eines Doppelpunkts an einen Befehl den Output unterdrücken können, um z.B. zu verhindern, daß eine 1000x1000 Matrix am Bildschirm ausgegeben wird.