Lineare Algebra 2, SS06
M. Hortmann

Blatt 10

Aufgabe 1

a) Man betrachte die Abbildungsvorschrift $x \to \frac{x^2+2}{2x}$.
Man zeige, daß dadurch auf dem Intervall $[1,2]$ eine Kontraktion definiert wird und bestimme deren Grenzwert.

b) Man betrachte die Abbildungsvorschrift $x \to 2+\frac{1}{x}$ und zeige daß dadurch auf dem Intervall $[2,3]$ eine Kontraktion g definiert wird. Man bestimme den Grenzwert und gebe eine Rekursionsformel für die Zähler und Nenner der durch $x_0=2$, $x_{n+1}=g(x_n)$ definierten Folge rationaler Zahlen an.

Aufgabe 2

Auf dem Raum $M_n(\mathbb{R})$ wird für eine Matrix $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ durch $\|A\|=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$ eine Norm und durch $d(A,B)=\|A-B\|$ eine Metrik definiert.

a) Man zeige mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, daß für $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ gilt: $\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\|$.

b) Für die Matrix $A=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$ gilt offenbar $\|A\|<1$. Daher ist die Folge der Partialsummen $B_n=\sum_{i=0}^{n} A^i$ eine Cauchyfolge. Für den Grenzwert gilt $\sum_{i=0}^{\infty} A^i=(E-A)^{-1}$. Berechnen Sie mit Hilfe von Pari oder einem anderen Computeralgebraprogramm B_{20} durch $B(\ldots(((B+E)B+E)B+E)\ldots)+E$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Matrix $(E-A)^{-1}$.

Aufgabe 3

Betrachten Sie das reelle lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bekanntlich kann man dies mit dem Gaußschen Algorithmus lösen. Wir benutzen hier den Banachschen Fixpunktsatz:

Man zerlege dazu die Matrix $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=D+\overline{D}$ und forme $Ax=b$ um in

$b=(D+\overline{D})x=Dx+\overline{D}x$ und dies in die Fixpunktgleichung $x=D^{-1}(b-\overline{D}x)$.

a) Zeigen Sie, daß eine Abbildung $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $x\to Cx+d$ mit $C\in M_n(\mathbb{R}), d\in\mathbb{R}^n$ eine Kontraktion ist, wenn $\|C\|<1$.

b) Zeigen Sie, daß die Abbildung $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $x\to D^{-1}(b-\overline{D}x)$ eine Kontraktion ist.

c) Berechnen Sie den Fixpunkt dieser Abbildung iterativ mit Pari und vergleichen Sie das Ergebnis mit der mittels des Gaußschen Algorithmus gewonnenen Lösung.

Aufgabe 4

Sei $A\in M_n(\mathbb{R})$.
Der Spektralradius ist definitionsgemäß das Minimum der Beträge der Eigenwerte von A .
Zeigen Sie, daß der Spektralradius von A kleiner oder gleich der obigen Matrixnorm $\|A\|$ ist.