Lineare Algebra 2, SS06
M. Hortmann

Blatt 9

Lösung Aufgabe 2

Gegeben seien ein zweidimensionaler Unterraum $U \subset \mathbb{R}^3$, also eine Ebene durch 0 , sowie 4 auf verschiedenen Geraden durch Null gelegene von Null verschiedene Punkte $x, y, z, w \in U$ [1].

Man betrachte nun eine Ebene V im $\mathbb{R}^3$, die nicht parallel zu U liegt und die den Nullpunkt nicht enthält. V und U schneiden sich in einer Geraden g . Wir nehmen an, daß die Geraden durch Null und die Punkte $x, y, z, w \in U$ nicht parallel zu g sind, so daß sie g in 4 Punkten x_g, y_g, z_g, w_g schneiden. Ist $\mathrm{d}(a, b)$ die euklidische Distanz zwischen zwei Punkten im $\mathbb{R}^3$, so bildet man das sog. „Doppelverhältnis“ $\dfrac{\mathrm{d}(x_g, z_g) \cdot \mathrm{d}(y_g, w_g)}{\mathrm{d}(x_g, w_g) \cdot \mathrm{d}(y_g, z_g)}$.

Man zeige, daß das Doppelverhältnis sich bei einer anderen Wahl von V nicht ändert[2] .

Lösung

Man muß zunächst erkennen, daß alle Punkte, deren Distanzen im Doppelverhältnis auftauchen, sowie sämtliche Geraden, die für das Problem eine Rolle spielen, in der Ebene U liegen, die wir mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren.

Man kann also umformulieren:

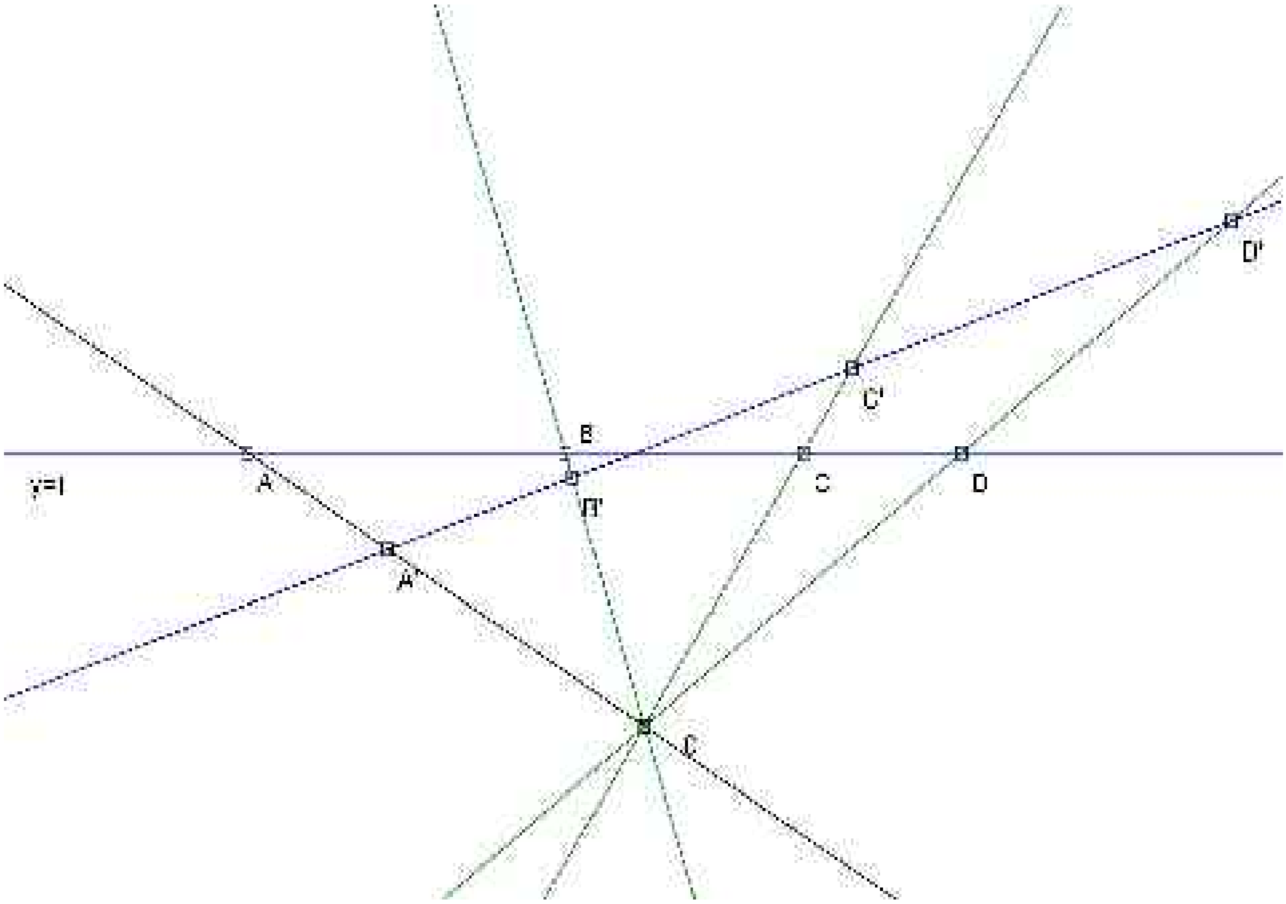
Gegeben seien 4 verschiedene Geraden durch den Nullpunkt im $\mathbb{R}^2$ und zwei weitere Geraden, die nicht durch den Nullpunkt gehen. Keine zwei dieser 6 Geraden seien parallel.

Nach einer Drehstreckung, im $\mathbb{R}^2$, durch die Längenverhältnisse unverändert bleiben, können wir annehmen, daß die erste der Geraden, die nicht durch Null geht, die Gerade $y=1$ ist. Wir haben also folgende Situation

---

1 Damit sind 4 Punkte auf einer projektiven Geraden im $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ gegeben.

2 Das Doppelverhältnis ist also eine Invariante von 4 „kollinearen“ Punkten im projektiven Raum.



Dieses Bild wurde übrigens erzeugt mit dem Programm "Zirkel und Lineal", welches man von http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/java/zirkel/doc_de/index.html unentgeltlich herunterladen kann.

Wir benutzen jetzt die Schreibweise $[P]$ für die Gerade, die durch 0 und *P* geht.
In diesem Sinne benennen wir die Geraden $g_1=[A],\ g_2=[B],\ g_3=[C], g_4=[D]$, wobei
$A=\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b\\1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}c\\1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}d\\1\end{pmatrix}$.
Natürlich gilt auch $g_1=[A'],\ g_2=[B'],\ g_3=[C'], g_4=[D']$

Wir setzen $A_1=A$. Weil *A* auf der Geraden durch *B* und C liegt, gibt es eine Darstellung
$A=B+\mu(C-B)$, also $\mu C=A+(\mu-1)B$ mit $\mu\neq 0{,}1$, $\mu=\dfrac{a-b}{c-b}$, $1-\mu=\dfrac{c-a}{c-b}$. Wir setzen $B_1=(\mu-1)B,\ C_1=\mu C$ und haben dadurch $A_1+B_1=C_1$

Außerdem liegt *B* auf der Geraden durch *A* und *D.* Also gibt es eine Darstellung
$B=D+\kappa(A-D)=(1-\kappa)D+\kappa A$ mit $\kappa\neq 0{,}1$ $\kappa=\dfrac{b-d}{a-d}$, also
$B_1=(\mu-1)B=(\mu-1)(1-\kappa)D+(\mu-1)\kappa A$. Wir setzen $D_1=(\mu-1)(1-\kappa)D$ und

$\lambda=(1-\mu)\kappa=\frac{c-a}{c-b}\frac{d-b}{d-a}$ und haben damit $D_1=\lambda A_1+B_1$.

Der Skalar λ ist aber auch gerade (zufällig :-) das Doppelverhältnis der 4 Punkte A, B, C, D .

Wir beginnen jetzt dieselbe Konstruktion aufs Neue, ausgehend von den Punkten A', B', C', D'

$A_1'=A'$, $A'=B'+\mu'(C'-B')$, also $\mu' C'=A'+(\mu'-1)B'$ mit $\mu'\neq 0,1$.
Zur Gleichung $B'-A'=(-\mu')(C'-B')$ addieren wir auf beiden Seiten $C'-B'$ und erhalten
$C'-A'=(1-\mu')(C'-B')$ und somit $|1-\mu'|=\frac{\|B'-A'\|}{\|C'-B'\|}$.

Wir setzen auch wieder $C_1'=\mu' C'$ und $B_1'=(\mu'-1)B'$, so daß sich die Gleichung
$C_1'=A_1'+B_1'$ ergibt.

Wie vorher geht es weiter mit
$B'=D'+\kappa'(A'-D')=(1-\kappa')D'+\kappa' A'$ mit $\kappa\neq 0,1$ $|\kappa|=\frac{\|B'-D'\|}{\|A'-D'\|}$, also
$B_1'=(\mu'-1)B'=(\mu'-1)\kappa' A'+(\mu'-1)(1-\kappa')D'$. Wir setzen $D_1'=(\mu'-1)(1-\kappa)D'$ und haben $D_1'=\lambda' A'+B_1'$ mit $\lambda'=(1-\mu')\kappa'=\pm\frac{\|C'-A'\|}{\|C'-B'\|}\frac{\|B'-D'\|}{\|A'-D'\|}$

Wenn wir zeigen können, daß $\lambda'=\lambda$, sind wir fertig, denn λ war positiv, so daß dann
$\lambda'=\frac{\|C'-A'\|}{\|C'-B'\|}\frac{\|B'-D'\|}{\|A'-D'\|}$ gelten muß.

Wir haben
$g_1=[A]=[A_1]=[A']=[A_1']$
$g_2=[B_1]=[B]=[B']=[B_1']$
$g_3=[C]=[C_1]=[A_1+B_1]=[C']=[C_1']=[A_1'+B_1']$
$g_4=[D]=[D_1]=[\lambda A_1+B_1]=[D]=[D_1']=[\lambda' A_1'+B_1']$

Wir erhalten also Skalarfaktoren $\alpha, \beta, \gamma, \delta\in\mathbb{R}$, alle ungleich Null, mit
$A_1'=\alpha A_{1,} B_1'=\beta B_{1,} C_1'=A_1'+B_1'=\gamma C_1=\gamma(A_1+B_1)$ und $D_1'=\delta D_1$, so daß
$\alpha A_1+\beta B_1=\gamma A_1+\gamma A_1$, woraus wegen der linearen Unabhängigkeit von A_1, B_1 zunächst
$\alpha=\gamma=\beta$ folgt.

Schließlich gilt auch noch $D_1'=\lambda' A_1'+B_1'=\lambda'\alpha A_1+\alpha B_1=\alpha(\lambda' A_1+B_1)=\alpha\lambda' A_1+\alpha B_1$ und wegen $D_1'=\delta D_1$ auch $D_1'=\delta D_1=\delta(\lambda A_1+B_1)=\delta\lambda A_1+\delta B_1$.

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von A_1 und B_1 ergibt sich $\alpha=\delta$ und $\alpha\lambda'=\delta\lambda$,
also, wie erwünscht: $\lambda=\lambda'$!