Lineare Algebra 2, SS06
M. Hortmann

Blatt 9

Aufgabe 1

Man betrachte das homogene Polynom $f(x,y,z,w)=x^2+y^2-z^2$ und die zugehörige Nullstellenmenge in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, also einen Kegel. Eine projektive Ebene in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ wird gegeben als Nullstellengebilde eines homogenen Polynoms $g(x,y,z,w)=ax+by+cz+dw$. Den Durchschnitt K_g beider Nullstellengebilde nennt man einen Kegelschnitt.

Da wir von $d\neq 0$ ausgehen, können wir oBdA auch davon ausgehen, daß $d=1$, also $g(x,y,z,w)=ax+by+cz+w$.

Ergänzend betrachten wir $\mathbb{R}^3$ als Untermenge von $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ mittels der Einbettung $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\to\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}$.

Eine durch g gegebene projektive Ebenen wird hier zu einer durch die Gleichung $ax+by+cz+d=0$ gegebenen affinen Ebene im $\mathbb{R}^3$, und der Kegelschnitt $K_g\subset\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ wird zu einem „normalen" Kegelschnitt im $\mathbb{R}^3$, also zum Durchschnitt des durch $x^2+y^2-z^2=1$ gegebenen Kegels mit einer Ebene, die nicht durch den Nullpunkt geht.

Diese Ebene können wir natürlich durch eine Abbildung $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ parametrisieren, indem wir 3 Punkte $a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}, a=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ auf ihr bestimmen, welche nicht auf einer Geraden liegen und dann die Abbildung $\left\{\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}c_1-a_1\\c_2-a_2\\c_3-a_3\end{pmatrix}\right.$ * bilden. Dazu gehört auch die Abbildung $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}c_1-a_1\\c_2-a_2\\c_3-a_3\\0\end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$, auf deren Bildern g verschwindet,

und mit $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\to\left[\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}c_1-a_1\\c_2-a_2\\c_3-a_3\\0\end{pmatrix}\right]$ eine Einbettung des $\mathbb{R}^2$ in die durch g gegebene projektive Ebene. Diese Abbildung ist nicht ganz surjektiv; es fehlen die Punkte $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ für die $ax+by+cz=0$, d.h. es fehlt eine projektive Gerade. Genau auf diese fehlenden Punkte wird es aber ankommen, wenn wir in Aufg. 1b) bijektive Abbildungen zwischen verschiedenen Kegelschnitten konstruieren.

Nach diesen Vorbemerkungen wählen wir jetzt die durch *g* gegebene projektive Ebene so, daß der Kegelschnitt bezüglich der Parametrisierung (*) durch die Gleichung $uv=1$ gegeben ist.

Anschaulich gehen wir aus von einem Kegelschnitt im $\mathbb{R}^3$. Wir schneiden im $\mathbb{R}^3$ den Kegel $x^2+y^2-z^2=0$ mit der Ebene $y=1$ und erhalten eine Hyperbel. Jetzt müssen wir nur noch Koordinaten *u,v* in der Ebene so wählen, daß wir die Gleichung $uv=1$ erhalten.

Wir wählen also $g(x,y,z,w)=y-w$, $a=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, so daß die Parametrisierung (*) so aussieht:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u-v}{2} \\ 1 \\ \frac{u+v}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Die Kegelschnittgleichung $x^2+y^2-z^2=0$ wird jetzt zu $\frac{1}{4}(u^2-2uv+v^2)+1-\frac{1}{4}(u^2+2uv+v^2)=$ $=-uv+1=0$, also $uv=1$. Die in der Aufgabenstellung gesuchten Punkte $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^4$ sind offenbar $p_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, p_3=\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

In Aufg. 1b) ist zu untersuchen, inwieweit verschiedene Kegelschnitte bijektiv aufeinander abbildbar sind, wenn man diese Frage im projektiven Kontext stellt. Die im obigen Beispiel fehlenden unendlich fernen Punkte der Hyperbel, also $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ würden dann mit ins Bild rücken.

Verschiedene Kegelschnitte werden bei gleichbleibendem Kegel durch verschiedene Ebenen gegeben. Sind diese Ebenen gegeben durch $g(x,y,z,w)=ax+by+cz+w$,

$g'(x,y,z,w)=a'x+b'y+c'z+w$, so erhalten wir eine bijektive Abbildung der Kegelschnitte über eine bijektive lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, welche den Kegel invariant läßt und g auf g' abbildet. Dazu betrachte man die Matrix $A=\begin{pmatrix} u & -v & 0 & 0 \\ v & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{pmatrix}$, wobei $u^2+v^2-w^2=0$, $w>0$.

Erfüllt der Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ die Kegelgleichung $x^2+y^2-z^2=0$, so offenbar auch

$$\begin{pmatrix} u & -v & 0 & 0 \\ v & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} .$$

Machen wir nun den Ansatz $(a',b',c',\ 1)=(a,b,c,\ 1)\begin{pmatrix} u & -v & 0 & 0 \\ v & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{pmatrix}$, so müssen wir nur noch prüfen, ob sich durch geeignete Wahl von $u,v,w,\alpha,\beta,\gamma$ diese Gleichung erfüllen läßt.

Dazu sind einige Fallunterscheidungen nötig.
Wir betrachten hier nur den Fall, daß weder *a,b* noch *a',b'* beide Null sind. Der Block $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$ repräsentiert eine Drehstreckung, die (a,b) auf (a',b') transformiert. Damit ist $w=\sqrt{u^2+v^2}$ festgelegt, aber wir haben $c'=cw+\gamma$, so daß durch entsprechende Wahl von γ die Gleichung erfüllbar wird.

Die restlichen Fallunterscheidungen seien dem Leser überlassen.

Betrachten wir nun die bijektive Abbildung $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, die durch

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \to \left[\begin{pmatrix} u & -v & 0 & 0 \\ v & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix}$ gegeben ist , so zeigen die obigen Überlegungen, daß der Kegelschnitt

$K_g := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \middle| x^2+y^2-z^2=0,\ ax+by+cz+w=0 \right\}$ bijektiv auf

$$K_{g'} := \left\{ \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \middle| x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0,\ a'x' + b'y' + c'z' + w' = 0 \right\}$$ abgebildet wird.

Die Bijektivität ergibt sich, weil wir die inverse Abbildung durch die inverse Matrix von
$A = \begin{pmatrix} u & -v & 0 & 0 \\ v & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{pmatrix}$ gegeben wird, die man ja sofort hinschreiben kann!

(Es ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{u}{w^2} & \frac{v}{w^2} & 0 & 0 \\ \frac{-v}{w^2} & \frac{u}{w^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{w} & 0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 1 \end{pmatrix}$ mit leicht auszurechnenden α', β', γ' .)