Lineare Algebra 2, SS06
M. Hortmann

Blatt 9

Aufgabe 1

Man betrachte das homogene Polynom $f(x,y,z,w)=x^2+y^2-z^2$ und die zugehörige Nullstellenmenge in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, also einen Kegel. Eine projektive Ebene in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ wird gegeben als Nullstellengebilde eines homogenen Polynoms $g(x,y,z,w)=ax+by+cz+dw$ [1]. Den Durchschnitt K_g beider Nullstellengebilde nennt man einen Kegelschnitt.

Wählt man 3 linear unabhängige Elemente $p_1,p_2,p_3\in\mathbb{R}^4$, auf denen g verschwindet, so wird durch $\mathbb{R}^2\xrightarrow{\varphi}\mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to p_1+x(p_2-p_1)+y(p_3-p_1)$ eine Abbildung definiert, auf deren Bildpunkten g ebenfalls verschwindet. Keiner der Bildpunkte ist der Nullvektor. Die Hintereinanderschaltung $\mathbb{R}^2\xrightarrow{\varphi}\mathbb{R}^4-\{0\}\xrightarrow{\pi}\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ [2] bildet also $\mathbb{R}^2$ in die durch g gegebene projektive Ebene ab.

a) Man wähle nun g und die Punkte p_1,p_2,p_3 so, daß $M:=(\pi\circ\varphi)^{-1}(K_g)\subset\mathbb{R}^2$ einmal der Einheitskreis, einmal die durch $y=x^2$ gegebene Parabel und einmal die durch $xy=1$ gegebene Hyperbel ist.

b) Man untersuche, inwieweit für verschiedene g die Kegelschnitte K_g bijektiv aufeinander abbildbar sind.

Aufgabe 2

Gegeben seien ein zweidimensionaler Unterraum $U\subset\mathbb{R}^3$, also eine Ebene durch 0, sowie 4 auf verschiedenen Geraden durch Null gelegene von Null verschiedene Punkte $x,y,z,w\in U$ [3].

Man betrachte nun eine Ebene V im $\mathbb{R}^3$, die nicht parallel zu U liegt und die den Nullpunkt nicht enthält. V und U schneiden sich in einer Geraden g. Wir nehmen an, daß die Geraden durch Null und die Punkte $x,y,z,w\in U$ nicht parallel zu g sind, so daß sie g in 4 Punkten x_g,y_g,z_g,w_g schneiden. Ist $\mathrm{d}(a,b)$ die euklidische Distanz zwischen zwei Punkten im $\mathbb{R}^3$, so bildet man das sog. „Doppelverhältnis“ $\dfrac{\mathrm{d}(x_g,z_g)\cdot\mathrm{d}(y_g,w_g)}{\mathrm{d}(x_g,w_g)\cdot\mathrm{d}(y_g,z_g)}$.

Man zeige, daß das Doppelverhältnis sich bei einer anderen Wahl von V nicht ändert[4].

---

1 Wir betrachten nur solche g, bei denen nicht d der einzige nichtverschwindende Koeffizient ist.

2 $\pi(x,y,z,w):=[x,y,z,w]$ (hier Zeilen- statt Spaltenvektoren zur Platzersparnis)

3 Damit sind 4 Punkte auf einer projektiven Geraden im $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ gegeben.

4 Das Doppelverhältnis ist also eine Invariante von 4 „kollinearen“ Punkten im projektiven Raum.