Lineare Algebra 2, SS06
M. Hortmann

Blatt 8 , Lösung zu Aufg. 2

Aufgabe 2

a) Man denke sich den $\mathbb{R}^2$ als xy-Ebene im $\mathbb{R}^3$ eingebettet und definiere die Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^2 \to S^2 - N$, indem man $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit dem Nordpol $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Sphäre durch eine Gerade verbindet und als $\Psi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Sphäre wählt. Dabei treten alle Punkte der Sphäre außer dem Nordpol als Bildpunkte auf. Man berechne Ψ und Ψ^{-1} .

Lösung:

Die Gerade im $\mathbb{R}^3$ durch den Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ und den Nordpol $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (1-t)x \\ (1-t)y \\ t \end{pmatrix}$. Man setze hilfsweise $s = 1-t$ und erhält für den Schnittpunkt der Gerade mit der Sphäre die Gleichung $s^2 x^2 + s^2 y^2 + (1-s)^2 = 1$, also $0 = s^2(x^2+y^2+1) - 2s = s\left(s(x^2+y^2+1)-2\right)$. Die Lösung $s=0$ ergibt den Nordpol, die Lösung $s = \frac{2}{x^2+y^2+1}$, also $t = 1-s = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2-1}$ ist die, die wir suchen. Einsetzen in die Geradengleichung ergibt den Punkt $\Psi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2+1} \\ \frac{2y}{x^2+y^2+1} \\ \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \end{pmatrix} \in S^2 - N$.

Die Umkehrfunktion berechnen wir analog. Wir gehen aus vom Punkt $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in S^2 - N$, also $u^2+v^2+w^2=1,\ w \neq 1$, und berechnen den Schnittpunkt der Gerade, die durch diesen Punkt und den Nordpol geht, mit der xy-Ebene. Die Gerade ist also diesmal gegeben durch

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\left(\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}tu\\tv\\1+t(w-1)\end{pmatrix}$$, und den Schnittpunkt mit der xy-Ebene finden wir, indem wir die dritte Komponente Null setzen, wodurch man $t=\dfrac{1}{1-w}$ erhält und jedenfalls nicht durch Null dividiert. Es ergibt sich also $x=\dfrac{u}{1-w}$ und $y=\dfrac{u}{1-w}$. Setzen wir $X\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{u}{1-w}\\ \dfrac{v}{1-w}\end{pmatrix}$, so wird dadurch eine Abbildung $X: S^2\to\mathbb{R}^2$ definiert.

Man rechnet jetzt explizit nach, daß es sich um die Umkehrabbildung von $\Psi:\mathbb{R}^2\to S^2-N$ handelt, indem man die Gültigkeit von $X\circ\Psi=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ und $\Psi\circ X=\mathrm{id}_{S^2-N}$ nachweist. Andererseits ist diese Beziehung aufgrund der geometrischen Konstruktion auch vorher klar.

b) Durch $\Phi\begin{bmatrix}\zeta\\\eta\end{bmatrix}:=\begin{pmatrix}\dfrac{2\operatorname{Re}\zeta\bar\eta}{|\zeta|^2+|\eta|^2}\\ \dfrac{2\operatorname{Im}\zeta\bar\eta}{|\zeta|^2+|\eta|^2}\\ \dfrac{|\zeta|^2-|\eta|^2}{|\zeta|^2+|\eta|^2}\end{pmatrix}$ wird eine bijektive Abbildung $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\overset{\Phi}{\to}S^2$ definiert. Man berechne die Umkehrabbildung Φ^{-1} . Welche Punkte von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ entsprechen dabei dem Nordpol, dem Südpol und dem Äquator der S^2 , welche der nördlichen und welche der südlichen Halbkugel? Beachten Sie die Beziehung zwischen den Aufgabenteilen a), b) .

Lösung:
Man beachte, daß zur Wahrung der Konsistenz mit 2a) die Reihenfolge der Koordinaten von Φ modifiziert wurde; auch ersetzen wir die Variablen z,*w* durch ζ,η , weil *w* bereits also Koordinatenvariable auf der Sphäre gebraucht wird und *z* als Variable in der komplexen Ebene.

Die in 2a) konstruierten Abbildungen $\Psi, X=\Psi^{-1}$ lassen sich durch die Identifikation $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$ via $z=x+iy=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ auch so auffassen: $\mathbb{C}\overset{\Psi}{\underset{X}{\Leftrightarrow}}S^2-N$, also $\Psi(z)=\begin{pmatrix}\dfrac{2\operatorname{Re}z}{|z|^2+1}\\ \dfrac{2\operatorname{Im}z}{|z|^2+1}\\ \dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\end{pmatrix}\in S^2-N$,

$X\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\dfrac{u}{1-w}+i\dfrac{v}{1-w}$. Betrachten wir die Teilmenge $U=\left\{\begin{bmatrix}\zeta\\\eta\end{bmatrix}\middle|\ \zeta,\eta\in\mathbb{C},\eta\neq0\right\}\subset\mathbb{P}(\mathbb{C})$, so ist die Abbildung $U \overset{\pi}{\to} \mathbb{C}$ $\begin{bmatrix}\zeta\\ \eta\end{bmatrix} \overset{\pi}{\to} z = \dfrac{\zeta}{\eta}$ bijektiv. Der Menge U fehlt ja gegenüber dem ganzen Raum $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ nur ein einziger Punkt, nämlich der "Nordpol" $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$. Wir rechnen nun nach, daß auf U gilt: $\Phi = \Psi \circ \pi$:

1. Komponente:

$$(\Psi_1 \circ \pi)\left(\begin{bmatrix}\zeta\\ \eta\end{bmatrix}\right) = \Psi_1\left(\frac{\zeta}{\eta}\right) = \frac{2\operatorname{Re}\dfrac{\zeta}{\eta}}{\dfrac{|\zeta|^2}{|\eta|^2}+1} = \frac{\dfrac{\zeta}{\eta}+\dfrac{\bar\zeta}{\bar\eta}}{\dfrac{|\zeta|^2+|\eta|^2}{|\eta|^2}} = \frac{\dfrac{\zeta\bar\eta+\bar\zeta\eta}{|\eta|^2}}{\dfrac{|\zeta|^2+|\eta|^2}{|\eta|^2}} = \frac{\zeta\bar\eta+\bar\zeta\eta}{|\zeta|^2+|\eta|^2} = \frac{2\operatorname{Re}\zeta\bar\eta}{|\zeta|^2+|\eta|^2}$$

2. Komponente: analog

3. Komponente:

$$(\Psi_3 \circ \pi)\left(\begin{bmatrix}\zeta\\ \eta\end{bmatrix}\right) = \Psi_3\left(\frac{\zeta}{\eta}\right) = \frac{\dfrac{|\zeta|^2}{|\eta|^2}-1}{\dfrac{|\zeta|^2}{|\eta|^2}+1} = \frac{\dfrac{|\zeta|^2-|\eta|^2}{|\eta|^2}}{\dfrac{|\zeta|^2+|\eta|^2}{|\eta|^2}} = \frac{|\zeta|^2-|\eta|^2}{|\zeta|^2+|\eta|^2}$$

Man stellt nun fest, daß die Abbildungsvorschrift $\Phi\begin{bmatrix}\zeta\\ \eta\end{bmatrix} := \begin{pmatrix}\dfrac{2\operatorname{Re}\zeta\bar\eta}{|\zeta|^2+|\eta|^2}\\ \dfrac{2\operatorname{Im}\zeta\bar\eta}{|\zeta|^2+|\eta|^2}\\ \dfrac{|\zeta|^2-|\eta|^2}{|\zeta|^2+|\eta|^2}\end{pmatrix}$ nicht nur auf U, sondern auch für den "Nordpol" $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$ Sinn macht und als Wert der Nordpol $\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \in S^2$ herauskommt.

Umgekehrt betrachten wir jetzt die Abbildung $S^2 - N \overset{X}{\to} \mathbb{C} \overset{\pi^{-1}}{\to} U \subset \mathbb{P}(\mathbb{C})$ und erhalten

$$\pi^{-1} \circ X\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix} = \pi^{-1}\left(\frac{u}{1-w}+i\frac{v}{1-w}\right) = \begin{bmatrix}\dfrac{u}{1-w}+i\dfrac{v}{1-w}\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u+iv\\ 1-w\end{bmatrix}.$$

Definiert man jetzt $\Sigma : S^2 \to \mathbb{P}(\mathbb{C})$ durch $\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix} \to \begin{cases}\begin{bmatrix}u+iv\\ 1-w\end{bmatrix}, & \text{falls } w \neq 1\\ \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}, & \text{falls } w=1\end{cases}$, so ist offenbar $\Sigma = \Phi^{-1}$. Bezüglich $S^2 - N \Leftrightarrow U = \mathbb{P}(\mathbb{C}) - \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ wurde ja bereits alles gezeigt, und für den Nordpol stimmt die Sache auch.