# Lineare Algebra 2, SS06
# M. Hortmann

## Blatt 8

**Aufgabe 1**

a) Man zeige: jeder Punkt des $\mathbb{P}^3(K)$ läßt sich in der Form $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, oder $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ schreiben

b) Verwenden Sie a) um die Anzahl der Punkte von $\mathbb{P}^3(\mathbb{Z}_p)$ zu berechnen.

c) Geben Sie einen projektiven Raum mit 13 und zwei verschiedene projektive Räume mit 31 Punkten an.

d) Bestimmen Sie für die beiden projektiven Räume mit 31 Punkten die Anzahl der projektiven Geraden und der projektiven Hyperebenen.

**Aufgabe 2**

a) Man denke sich den $\mathbb{R}^2$ als xy-Ebene im $\mathbb{R}^3$ eingebettet und definiere die Abbildung $\Psi: \mathbb{R}^2 \to S^2 - N$, indem man $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit dem Nordpol $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Sphäre durch eine Gerade verbindet und als $\Psi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Sphäre wählt. Dabei treten alle Punkte der Sphäre außer dem Nordpol als Bildpunkte auf. Man berechne $\Psi$ und $\Psi^{-1}$.

b) Durch $\Phi\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} := \begin{pmatrix} \dfrac{|z|^2 - |w|^2}{|z|^2 + |w|^2} \\ \dfrac{2 \operatorname{Re} z \overline{w}}{|z|^2 + |w|^2} \\ \dfrac{2 \operatorname{Im} z \overline{w}}{|z|^2 + |w|^2} \end{pmatrix}$ wird eine bijektive Abbildung $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \xrightarrow{\Phi} S^2$ definiert. Man berechne die Umkehrabbildung $\Phi^{-1}$. Welche Punkte von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ entsprechen dabei dem Nordpol, dem Südpol und dem Äquator der $S^2$, welche der nördlichen und welche der südlichen Halbkugel? Beachten Sie die Beziehung zwischen den Aufgabenteilen a), b) .

**Aufgabe 3**

Man betrachte die Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\in\mathbb{Z},\ \ ad-bc=1\right\}$ , also die Gruppe der 2x2-Matrizen mit ganzzahligen Koeffizienten und Determinante 1, sowie die Menge $M:=\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .

Die durch $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}:=\begin{bmatrix} az+bw \\ cz+dw \end{bmatrix}$ gegebene Abbildung $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\to\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ definiert eine Gruppenoperation von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ .

Wir setzen $M_1:=\left\{\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \middle| \operatorname{Im} z\overline{w}>0\right\}$ , $M_2:=\left\{\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \middle| \operatorname{Im} z\overline{w}=0\right\}$ , $M_3:=\left\{\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \middle| \operatorname{Im} z\overline{w}<0\right\}$ und haben $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})=M_1\cup M_2\cup M_3$ . Betrachten Sie nun den Orbit[1] eines Punktes von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ unter der Gruppenoperation und zeigen Sie, daß dieser entweder ganz in $M_1$ oder in $M_2$ oder in $M_3$ liegt.

---

1 Ist $G\times M\to M$ eine Operation der Gruppe $G$ auf der Menge $M$ , und ist $x\in M$ , so ist der Orbit von $G$ durch $x$ definitionsgemäß die Menge $Gx:=\{gx \mid g\in G\}$ .