Lineare Algebra 2, SS06
M. Hortmann

Blatt 7

In der Vorlesung wurde folgender *Spektralsatz* bewiesen: Die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix mit reellen Koeffizienten sind sämtlich reell, und man kann eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren konstruieren.

Aufgabe 1

Gegeben sei die symmetrische Matrix $A=\begin{pmatrix} -3 & 7 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & 7 & -3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

Man konstruiere eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$, die aus Eigenvektoren von A besteht.

Aufgabe 2

Eine symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ heißt *positiv* definit, wenn $\forall\, x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0:\ x^t A x > 0$.
Ist $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in M_n(\mathbb{R})$ so sei für $1 \leqslant k \leqslant n$ $A_k := (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ 1\leqslant j\leqslant k}} \in M_k(\mathbb{R})$.

a) Man zeige: symmetrische Matrix ist genau dann positiv definit, wenn sie ausschließlich positive Eigenwerte besitzt.

b) Man zeige: Eine symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ ist genau dann positiv definit, wenn für alle k , $1 \leqslant k \leqslant n$ die Determinanten der A_k positiv sind.

c) Man überprüfe mit Hilfe des Kriteriums aus b), ob die Matrix aus Aufg. 1 und/oder die Matrix
$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 7 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 7 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ positiv definit sind.

d) Man zeige, daß die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$ positiv definit ist.

e) Man zeige, daß alle Hauptdiagonalelemente einer positiv definiten Matrix positiv sind.