Lineare Algebra 2, SS06
M. Hortmann

Blatt 6

Aufgabe 1

Sei K ein Körper und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$. Man bilde die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & & \cdots & & a_{n-1} \end{pmatrix}$

und zeige, daß sie das charakteristische Polynom $\chi_A = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ besitzt.

Aufgabe 2

a) Man gehe aus vom Körper $K = \mathbb{Z}_3$, wähle $a_0 = 2,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0$, sowie die Startwerte $x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = 0$ und berechne die Werte der rekursiv durch $x_{n+1} = a_2 x_n + a_1 x_{n-1} + a_0 x_{n-2}$ gegebenen Schieberegisterfolge mit Werten in $\mathbb{Z}_3$ bis zum Auftreten einer Periode. Wie groß ist diese Periode?

b) Man bilde die zugehörige Schiebematrix A aus Aufg. 1, berechne ihr charakteristisches Polynom $\chi_A \in \mathbb{Z}_3[X]$ und zeige, daß es irreduzibel ist. Anschließend berechne man die Ordnung des Elements $\overline{X}$ in der multiplikativen Gruppe des Restklassenkörpers $\mathbb{Z}_3[X]/<\chi_A>$.
Hinweis: Zur Feststellung der Ordnung von $\overline{X}$ sollte man an einer Stelle $\overline{X}^{13}$ berechnen. Dazu berechne man $\overline{X}^3, \overline{X}^4$, was trivial ist, sodann $\overline{X}^9 = \left(\overline{X}^3\right)^2$ und schließlich $\overline{X}^{13} = \overline{X}^9\,\overline{X^4}$: alles leicht ohne Computer machbar.

Aufgabe 3 Eisensteinsches Irreduzibilitätskriterium

a) Gegeben sei ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ $a_n \neq 0$, $p \in \mathbb{N}$ sei eine Primzahl, und es gelte: p teilt $a_0, \ldots, a_{n-1}$, p teilt nicht a_n , p^2 teilt nicht a_0 .

Man zeige: f ist irreduzibel über $\mathbb{Z}[X]$.

b) Oft läßt sich das Eisensteinkriterium nicht direkt anwenden, z.B. für $f = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - x + 1$.
Man beweise dessen Irreduzibilität mit Hilfe der Substitution $x \leftarrow x+1$ und anschließender Anwendung des Kriteriums.