Lineare Algebra 2, SS06
M. Hortmann

Blatt 5

Aufgabe 1

a) R, S seinen Ringe. Eine Abbildung $\varphi: R \to S$ heißt *Derivation* , wenn sie ein Homomorphismus der zu Grunde liegenden abelschen Gruppen ist und $\forall a, b \in R: \ \varphi(ab) = \big(\varphi(a)\big)b + a\big(\varphi(b)\big)$

Sei nun K ein Körper, $f \in K[X]$, $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ und $\partial(f) := f' := \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} X^i$.
Man zeige: Die Abbildung $\partial: K[X] \to K[X]$ ist eine Derivation.

b) Sei $E \supset K$ ein Erweiterungskörper, $f \in K[X]$, $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ Polynom n-ten Grades. Über E zerfalle f in Linearfaktoren, d.h. es gibt eine Darstellung $f = a_n \prod_{i=0}^{n} \left(X - \zeta_i\right)$ mit nicht notwendig verschiedenen Elementen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in E$. Die ζ_i sind also gerade die Nullstellen von f. Ist $\zeta = \zeta_i = \zeta_j$ für $i \neq j$, so nennt man ζ eine *mehrfache Nullstelle.*

Man zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

> f besitzt eine mehrfache Nullstelle.
> f und f' besitzen eine gemeinsame Nullstelle.
> f und f' besitzen einen nicht-trivialen Teiler.
> der Grad von $\mathrm{ggT}(f, f')$ ist größer als Null[1].

c) In Blatt 3 wurde gezeigt, daß äquivalent zu den obigen Aussagen auch die folgende ist:
Die Resolvente[2] Res(f, f') verschwindet. Man setzt $D(f) := \mathrm{Res}(f, f')$ und nennt diesen Ausdruck *Diskriminante von f*.

Man berechne – für $\mathrm{char}(K) \neq 2{,}3$ – die Diskriminanten von $X^2 + px + q$ und $X^3 + px + q$.

Aufgabe 2
Sei P_n der Unterraum von $K[X]$, der aus den Polynomen vom Grad kleiner oder gleich n besteht. Man betrachte den oben definierten Ableitungsoperator als lineare Abbildung $P_n \to P_n$.
Man berechne sein Minimalpolynom[3].

Aufgabe 3
Sei $V = M_n(k)$ und $A \in M_n(K)$. Durch $B \to BA$ wird eine lineare Abbildung $\Phi: V \to V$ definiert. Man zeige, daß das Minimalpolynom von Φ gleich dem Minimalpolynom von A ist.

---

1 Die Bedeutung dieser Tatsache liegt darin, daß man den ggT berechnen kann, ohne eine Nullstelle von f zu kennen.
2 Was wir in Blatt 3 als "Resolvente" definiert haben, heißt bei anderen Autoren auch "Resultante" .
3 Das Minimalpolynom f einer linearen Abbildung $T: V \to V$ ist das normierte Polynom kleinsten Grades, für das $f(T) = 0$. Das Minimalpolynom ist eindeutig bestimmt und es gilt (Cayley-Hamilton) $\mathrm{grad}(f) \leqslant \dim_K V$.